ΕΠΑ.Λ. Α' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σελίδα 81 σχολικού βιβλίου.

Α2.
α) Σωστό.
β) Λάθος.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.

Α3.
α) $F(x) = x + c$

β) $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

γ) $F(x) = \eta\mu\, x + c$

δ) $F(x) = \varepsilon\phi\, x + c$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχω

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4 + x_5 \cdot v_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} \Leftrightarrow 1 = \frac{(-1)\cdot 8 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 10 + 2v_4 + 3 \cdot 8}{8 + 12 + 10 + v_4 + 8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{26 + 2v_4}{38 + v_4} \Leftrightarrow 26 + 2v_4 = 38 + v_4 \Leftrightarrow v_4 = 12$$

Β2.

x_i	v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$
-1	8	0,16	16	8	0,16	16
0	12	0,24	24	20	0,40	40
1	10	0,20	20	30	0,60	60
2	12	0,24	24	42	0,84	84
3	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	50	1	100			

Β3. Επειδή οι τιμές $x_2 = 0$ και $x_4 = 2$ εμφανίζονται με την μεγαλύτερη συχνότητα ($v = 12$) υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές, οι $0^\circ C$ και $2^\circ C$. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $(v = 50)$ η διάμεσος είναι

$$\delta = \frac{\text{άθροισμα μεσαίων παρατηρήσεων}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1^\circ \mathrm{C}.$$

Β4. Η θερμοκρασία ήταν το πολύ $0^\circ C$ για $v_1 + v_2 = 8 + 12 = 20$ ημέρες. Το ποσοστό των ημερών με θερμοκρασία τουλάχιστον $2^\circ C$ είναι $f_3\% + f_4\% = 24 + 16 = 40\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f συνεχής στο R θα είναι και στο $x_0 = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2 - 5x + \lambda\right) = 1 - 5 + \lambda = \lambda - 4$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x + \sqrt{x}\right) = 1 + 1 = 2$

$f(1) = 1 - 5 + \lambda = \lambda - 4$

Άρα $\lambda - 4 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 6}$ και $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & x \le 1 \\ x + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$

Γ2. Έχω $f(1) = 1 - 5 + 6 = 2$

οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x^3 - x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6 - 2}{x^3 - x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - x} =$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x-4)}{x\left(x^2 - 1\right)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x-4)}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x - 4}{x(x+1)} = \dfrac{-3}{2}$.

Γ3. Έχω $f(9) = 9 + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12$

οπότε $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x) - f(9)}{\sqrt{x+2} - 1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 5x + 6 - 12}{\sqrt{x+2} - 1} =$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x+2} - 1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-6)}{\sqrt{x+2} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+2} + 1} =$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-6)\left(\sqrt{x+2} + 1\right)}{x + 2 - 1} = \lim\limits_{x\to -1} (x-6)\left(\sqrt{x+2} + 1\right) = -7 \cdot 2 = -14$.

Γ4. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx =$

$= \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 5x + 6)dx + \int_1^4 \left(x + \sqrt{x}\right)dx =$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) - 0 + \left(\frac{16}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \ldots = 16.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \in R$ είναι:

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot \beta \cdot x + \alpha + 2$ και $f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot \beta$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 1$ από θεώρημα Fermat έχω ότι

$f'(1) = 0$ άρα $3 \cdot a + 2 \cdot \beta + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha + \beta + 1 = 0 \, (1)$

Ακόμη $f''(0) = 2 \Leftrightarrow 6 \cdot a \cdot 0 + 2 \cdot \beta = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

οπότε η (1) δίνει $2 \cdot \alpha + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$

Δ3. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$

Έχω $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1,$

και $f'(x) = -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-6} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-6}{-6} = 1 \end{array} \right.$$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	
f′(x)		↘		↗		↘	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

Η f είναι γνήσια φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{3} \right]$ και $[1, +\infty)$ και γνήσια αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1 \right]$.

Στο $x_1 = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την

$f(1) = -1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 0$ και στο $x_2 = -\frac{1}{3}$ τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{-1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)-1=-\frac{-1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-1=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-1=$$
$$=\frac{4}{27}-\frac{36}{27}=-\frac{32}{27}.$$

Δ4. Αφού στο $x_1=1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την 0 και για x>1 είναι γνήσια φθίνουσα, στο [2, 3] θα παίρνει αρνητικές τιμές .

Άρα $\mathrm{E}(\Omega)=\int_2^3 -f(x)dx=\int_2^3\left(\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1\right)d\mathrm{x}=\left[\frac{\mathrm{x}^4}{4}-\frac{\mathrm{x}^3}{3}-\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\mathrm{x}\right]_2^3=$

$$\left(\frac{3^4}{4}-\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+2\right)\ldots=\frac{101}{12}\text{ τ.μ..}$$