ΤΑΞΗ: **$3^η$ ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$

Μονάδες 6

Α4. Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

i. Μια συνάρτηση είναι 1–1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 2

ii. $i^{4\nu+3} = i$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Μονάδες 2

iii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

iv. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $y = f'(x_0)$.

Μονάδες 2

v. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ, στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2}$ και $g(x) = \ln x + 2$.

Β1. Να βρείτε τις συνθέσεις fog και gof και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^{-2}, 2)$.

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{(gof)(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(fog)(x)} = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$(1+3\alpha^2)\, f(x) = e^{\int_x^1 2t f(t)\,dt},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x f^2(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ii. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3\alpha^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^\alpha t f(t)\,dt$ είναι ανεξάρτητη του α.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f.

Μονάδες 8

Γ4. Αν Ε είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$,

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-2e^{x+2}}{x+2} = -1 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(-2) = 1$ και $f(x) \le x + 4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0\in(-2, 0)$.

Μονάδες 6

Δ3. Η εξίσωση

$$f'\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x)\,dt\right) = f'(0)$$

έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ την $x = 5$.

Μονάδες 7

Δ4. Ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει

$$f(|z+i|) \le f(|z|+1)$$

είναι φανταστικός.

Μονάδες 6