Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία βλ. Βιβλίο ΟΕΔΒ Άλγεβρα Β΄ Λυκείου σελ. 28.
Α.2. Θεωρία σελ. 95, 96.

Β.1.
1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε $\mathrm{P}(-3)=-8$ και $\mathrm{P}(-2)=0$

α)
- $P(-3)=-8 \Leftrightarrow (-3)^3+\alpha\cdot(-3)^2-(-3)+\beta=-8 \Leftrightarrow 9\alpha+\beta=16$
- $P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^3+\alpha(-2)^2-(-2)+\beta=0 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=6$

Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} 9\alpha+\beta=16 \\ 4\alpha+\beta=6 \end{array}\right\}$$ που έχει λύση $\alpha=2$ *και* $\beta=-2$.

β) Για $\alpha=2$ *και* $\beta=-2$ το πολυώνυμο γίνεται $\mathrm{P}(x)=x^3+2x^2-x-2$. Έτσι έχουμε

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-x-2 & x^2+x-1 \\ \hline -x^3-x^2+x & x+1 \\ \hline x^2+0\cdot x-2 & \\ \hline -x^2-x+1 & \\ \hline -x-1 & \end{array}$$

Άρα $\Pi(x)=x+1$ και $\upsilon(x)=-x-1$.

Επομένως $P(x)=(x^2+x-1)(x+1)-x-1$.

γ) $P(x)=Q(x)-1 \Leftrightarrow (x^2+x+1)(x+1)-x-1=x^2+x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+x-1)(x+1)-x-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+x-1)(x+1)-x-(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+x-1)x-x=0 \Leftrightarrow (x^2+x-2)x=0$

άρα οι λύσεις είναι $x=0$, $x=-2$ $\kappa\alpha\iota$ $x=1$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Η εξίσωση (1) γίνεται

$\eta\mu 2x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\left(2\eta\mu x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \;\; \acute{\eta} \;\; \eta\mu x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Οι λύσεις είναι

- $\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$
- $\eta\mu x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; x=2\kappa\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4}$, $\kappa\in Z$.

β) Για κάθε $x\in[0,\pi]$ έχουμε

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}\le 2k\pi\le\pi-\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{1}{4}$.

$\mathrm{A}\rho\alpha$ $k=0$.Τ$\acute{o}\tau\varepsilon$ $x=\dfrac{\pi}{2}$

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}\le 2k\pi\le\pi+\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{3}{4}$.

Άρα ο k δεν ορίζεται

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\le\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi\le\pi-\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{8}\le k\le\dfrac{3}{8}$.

$\mathrm{A}\rho\alpha$ $k=0$.Τ$\acute{o}\tau\varepsilon$ $x=\dfrac{\pi}{4}$

$0\le x\le\pi \Leftrightarrow 0\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\le\pi \Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4}\le 2k\pi\le\pi-\dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{8}\le k\le\dfrac{1}{8}$.

$\mathrm{A}\rho\alpha$ $k=0$.Τ$\acute{o}\tau\varepsilon$ $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $x_1=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ $\kappa\alpha\iota$ $x_3=\dfrac{3\pi}{4}$.

Ακόμα $x_1 + x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi = 2\frac{\pi}{2} = 2x_2$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Β. $$\frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha} = \frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2} = \frac{\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)^2-2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)+1}{\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)^2+2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)+1} =$$

$$= \frac{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2+1}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1+4\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2+1} = \frac{\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\right)^4}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha} =$$

$$= \frac{\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\right)^4}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha} = \frac{\left(-2\eta\mu^2\alpha\right)^2}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha} = \frac{4\eta\mu^4\alpha}{4\sigma\upsilon\nu^4\alpha} = \varepsilon\varphi^4\alpha$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. i. Έχουμε :

$$L = \varphi(2)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi(4)\cdot\ldots\cdot\varphi(63)+2004 =$$

$$= \frac{\cancel{\ln 3}}{\ln 2}\cdot\frac{\cancel{\ln 4}}{\cancel{\ln 3}}\cdot\frac{\cancel{\ln 5}}{\cancel{\ln 4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln 64}{\cancel{\ln 63}}+2004 =$$

$$= \frac{\ln 64}{\ln 2}+2004 = \frac{\ln 2^6}{\ln 2}+2004 = \frac{6\cdot\cancel{\ln 2}}{\cancel{\ln 2}}+2004 = 6+2004 = 2010.$$

ii. Έχουμε :

$$\varphi(x) > \varphi\left(x^2\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\ln x}$$

Επειδή για $x>1$ είναι $\ln x > 0$ έχουμε

$$\frac{\ln(x+1)}{1} > \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} \Leftrightarrow 2\ln(x+1) > \ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1)^2 > \ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > x^2+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1 > x^2+1 \Leftrightarrow x>0$$

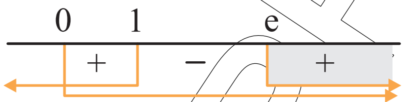
Αλλά $x>1$. Επομένως η λύση είναι $x>1$.

B. i. Πρέπει

$$e^{2x}-(e+1)e^{x}+e>0 \Leftrightarrow e^{2x}-e\cdot e^{x}-e^{x}+e>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x}\left(e^{x}-e\right)-\left(e^{x}-e\right)>0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-e\right)\cdot\left(e^{x}-1\right)>0.$$

Θέτω $e^{x}=y>0$. Τότε
$(y-e)(y-1)>0$



$y>e$ ή $0<y<1$. Επειδή x $>0 \Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow y>1$.

Άρα ισχύει μόνο $e^{x}>e \Leftrightarrow x>1$

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x\in(1,+\infty)$.

ii. Για κάθε $x>e \Leftrightarrow \ln x>1$ επομένως έχουμε

$$f(\ln x)=\ln(x-1) \Leftrightarrow \ln\left(e^{2\ln x}-(e-1)e^{\ln x}+e\right)=\ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x^{2}}-(e-1)e^{\ln x}+e=(x-1) \Leftrightarrow x^{2}-(e-1)x+e=x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{2}-e\cdot x-x+e-x+1=0 \Leftrightarrow x(x-e)-(x-e)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-e)(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-e-1)=0$$

Οι λύσεις είναι

$x=1$ $\left(Α\textit{πορρίπτεται αφού } x>e\right)$ και

$x=e+1$ $\left(\textit{Δεκτή}\right)$