ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Βλέπε απόδειξη (1) σελ.175 σχολικού βιβλίου

Α.2. **α)** Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 35 σχολικού βιβλίου.
β) Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 74 σχολικού βιβλίου.

Α.3. **α)** Σωστό - (βλέπε σελίδα 130 σχολικού βιβλίου).
β) Σωστό - (βλέπε σελίδα 174 σχολικού βιβλίου).
γ) Λάθος - (βλέπε σελίδα 75 σχολικού βιβλίου). Το σωστό είναι $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \text{συν}x \neq 0\}$
δ) Λάθος - (βλέπε σελίδα 44 σχολικού βιβλίου). Το σωστό είναι ότι μετατοπίζεται προς τα αριστερά.
ε) Σωστό - (βλέπε σελίδα 164 σχολικού βιβλίου).

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Αφού το x + 1 = x – (–1) είναι παράγοντας του P(x), από γνωστό θεώρημα ισχύει P(–1) = 0. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(-1)=0 &\Leftrightarrow 2(-1)^3+(\alpha+\beta)(-1)^2+(2\alpha+5\beta)(-1)+3=0 \\ &\Leftrightarrow 2(-1)+(\alpha+\beta)\cdot 1-2\alpha-5\beta+3=0 \\ &\Leftrightarrow -2+\alpha+\beta-2\alpha-5\beta+3=0 \\ &\Leftrightarrow -\alpha-4\beta+1=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha+4\beta=1 \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x – 2) ισούται με –9, από γνωστό θεώρημα ισχύει: P(2) = – 9. Έχουμε:

$$\mathrm{P}(2)=-9 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+(\alpha+\beta)\cdot 2^2+(2\alpha+5\beta)\cdot 2+3=-9$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 8+4(\alpha+\beta)+2(2\alpha+5\beta)+3=-9$$
$$\Leftrightarrow 16+4\alpha+4\beta+4\alpha+10\beta+3=-9$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha+14\beta=-9-16-3 \text{ (απλοποιούμε με το 2)}$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha+7\beta=-14 \qquad \textbf{(2)}$$

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2):

$$\begin{cases}\alpha+4\beta=1\\4\alpha+7\beta=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\4(1-4\beta)+7\beta=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\4-16\beta+7\beta=-14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\beta\\-9\beta=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-4\cdot 2\\\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-7\\\beta=2\end{cases}$$

Β.2. Για $\alpha=-7$ και $\beta=2$ το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ γράφεται:
$$\mathrm{P}(x)=2x^3+(-7+2)x^2+\left[2(-7)+5\cdot 2\right]x+3 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

α) Είναι $\mathrm{P}(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0$

Σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $\alpha_0=3$, δηλαδή οι αριθμοί $\pm1,\pm3$

Από το ερώτημα (B_1) ισχύει $\mathrm{P}(-1)=0$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα του $\mathrm{P}(x)$, οπότε εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho=-1$ έχουμε:

2	-5	-4	3	ρ= –1
	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:
$$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$$
ή
$$2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x^2-7x+3)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:
$$(x+1)(2x^2-7x+3)=0\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ή} \quad 2x^2-7x+3=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x=3$$

β)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-4x+3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -2x^3 \qquad +2x & 2x-5 \\ \hline -5x^2-2x+3 & \\ 5x^2 \qquad -5 & \\ \hline -2x-2 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$2x^3-5x^2-4x+3=(x^2-1)(2x-5)+(-2x-2)$$

γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε $P(x)=(x+1)(2x^2-7x+3)$ και από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $υ(x) = -2x - 2 = -2\,(x + 1)$.

Για να ορίζεται η ανίσωση $\frac{υ(x)}{P(x)}\geq 0$ πρέπει

$$P(x)\neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x\neq 1} \text{ και } \boxed{x\neq \frac{1}{2}} \text{ και } \boxed{x\neq 3}$$

Τότε:

$$\frac{υ(x)}{P(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{(x+1)(2x^2-7x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2x^2-7x+3}\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3<0$$

Το πρόσημο του $2x^2-7x+3$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$2x^2-7x+3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\frac{1}{2}<x<3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Απλοποιούμε τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, με αναγωγή τους στο 1ο τεταρτημόριο:

$$ημ(π+θ)=-ημθ$$
$$συν(-θ)=συνθ$$
$$ημ\left(\frac{π}{2}-θ\right)=συνθ$$
$$ημ(θ-π)=ημ\left[-(π-θ)\right]=-ημ(π-θ)=-ημθ$$

Τότε το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}-ημθx+συνθy=1\\ συνθx+ημθy=1\end{cases}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος:

$$D=\begin{vmatrix}-ημθ & συνθ\\ συνθ & ημθ\end{vmatrix}=-ημ^2θ-συν^2θ=-\left(ημ^2θ+συν^2θ\right)=-1\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & συνθ\\ 1 & ημθ\end{vmatrix}=ημθ-συνθ$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-ημθ & 1\\ συνθ & 1\end{vmatrix}=-ημθ-συνθ$$

Αφού $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{ημθ-συνθ}{-1},\frac{-ημθ-συνθ}{-1}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x,y)=(συνθ-ημθ,\ συνθ+ημθ)$$

Γ.2. **α)** Η $f(x)=(10^α-3)συνx-4$ είναι της μορφής $f(x)=ρσυνx+c$ με $ρ=10^α-3$ και $c=-4$.

Η μέγιστη τιμή της f(x) είναι $|ρ|+c=|10^α-3|-4$, οπότε:

$$|10^α-3|-4=3\Leftrightarrow|10^α-3|=3+4\Leftrightarrow|10^α-3|=7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\alpha}-3=-7 \\ \text{ή} \\ 10^{\alpha}-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\alpha}=-4 \ (\text{αδύνατη αφού } 10^{\alpha}>0) \\ \text{ή} \\ 10^{\alpha}=10 \end{cases} \Leftrightarrow 10^{\alpha}=10^{1} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$$

β) Έχουμε:

$$xy=f(\theta) \Leftrightarrow xy=7\text{συν}\theta-4$$
$$\Leftrightarrow (\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta)(\text{συν}\theta+\text{ημ}\theta)=7\text{συν}\theta-4$$
$$\Leftrightarrow \text{συν}^2\theta-\text{ημ}^2\theta=7\text{συν}\theta-4$$
$$\Leftrightarrow \text{συν}^2\theta-(1-\text{συν}^2\theta)=7\text{συν}\theta-4$$
$$\Leftrightarrow \text{συν}^2\theta-1+\text{συν}^2\theta-7\text{συν}\theta+4=0$$
$$\Leftrightarrow 2\text{συν}^2\theta-7\text{συν}\theta+3=0$$

Θέτουμε $\text{συν}\theta=\omega$ με $-1\le\omega\le1$, οπότε η εξίσωση γίνεται $2\omega^2-7\omega+3=0$. Οι ρίζες της είναι $\omega=3$ (απορρίπτεται) και $\omega=\frac{1}{2}$.

Τότε:

$$\omega=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}\theta=\text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Είναι $\ln(2e^2)=\ln2+\ln e^2=\ln2+2\ln e=\ln2+2\cdot1=2+\ln2>2$,

αφού $1<2 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln1<\ln2 \Leftrightarrow 0<\ln2$ άρα $\ln(2e^2)>2$

Επίσης $2<3 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^2<e^3 \Leftrightarrow e^2+e^2<e^3+e^2 \Leftrightarrow 2e^2<e^2+e^3 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(2e^2)<\ln(e^2+e^3)$

Άρα

$$2<\ln(2e^2)<\ln(e^3+e^2)$$

Για να ορίζεται η f(x) πρέπει:

$$\left.\begin{array}{c} e^x - e^2 > 0 \\ \text{και} \\ \ln\left(e^x - e^2\right) - 2 \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e^x > e^2 \\ \text{και} \\ \ln\left(e^x - e^2\right) \neq 2 \end{array}\right\} \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{c} x > 2 \\ \text{και} \\ e^x - e^2 \neq e^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ e^x \neq 2e^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ \ln e^x \neq \ln\left(2e^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ x \ln e \neq \ln\left(2e^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ x \neq \ln\left(2e^2\right) \end{array}\right. \overset{\ln\left(2e^2\right) > 2}{\Leftrightarrow} x \in \left(2, \ln\left(2e^2\right)\right) \cup \left(\ln\left(2e^2\right), +\infty\right)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$A = \left(2,\ \ln\left(2e^2\right)\right) \cup \left(\ln\left(2e^2\right),\ +\infty\right)$$

Δ.2. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει: $y - 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2$

Τότε $\dfrac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6 \Leftrightarrow \dfrac{y^2 - 3}{y - 2} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2 - 3 - 6(y - 2)}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 - 3 - 6y + 12}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 6y + 9}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y - 3)^2}{y - 2} \geq 0 \overset{y \neq 2}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{y \neq 2}{\Leftrightarrow} (y - 3)^2 (y - 2) \geq 0$$

Οι ρίζες των παραγόντων του γινομένου είναι οι y = 3, y = 2 και για το πρόσημο των παραγόντων έχουμε:

y	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$(y-3)^2$	+	|	+	0	+	
$y-2$	−	0	+	|	+	
$(y-3)^2(y-2)$	−	0	+	0	+	

Τότε $(y - 3)^2 (y - 2) \geq 0 \overset{y \neq 2}{\Leftrightarrow} y > 2$ δηλαδή $y \in (2, +\infty)$

Δ.3. α) Έχουμε αποδείξει από το Δ.1. ότι $\ln\left(e^3+e^2\right)>\ln\left(2e^2\right)$ άρα το $x_0\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$ που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού A της f.

Τότε $$f\left(x_0\right)=\frac{\left[\ln\left(e^{x_0}-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^{x_0}-e^2\right)-2}=\frac{\left[\ln\left(e^{\ln\left(e^3+e^2\right)}-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^{\ln\left(e^3+e^2\right)}-e^2\right)-2}\overset{e^{\ln\alpha}=\alpha}{=}$$

$$=\frac{\left[\ln\left(e^3+e^2-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^3+e^2-e^2\right)-2}=\frac{\left(\ln e^3\right)^2-3}{\ln e^3-2}=$$

$$=\frac{\left(3\ln e\right)^2-3}{3\ln e-2}=\frac{\left(3\cdot1\right)^2-3}{3\cdot1-2}=\frac{9-3}{3-2}=\frac{6}{1}=6$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$ είναι $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$

Είναι $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge 6\Leftrightarrow \dfrac{\left[\ln\left(e^x-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^x-e^2\right)-2}\ge 6$

Θέτουμε

$$\ln\left(e^x-e^2\right)=y,$$

οπότε:

$$\frac{y^2-3}{y-2}\ge 6\overset{(\Delta.2.)}{\Leftrightarrow} y>2$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x-e^2\right)>2$$

$$\Leftrightarrow e^x-e^2>e^2$$

$$\Leftrightarrow e^x>2e^2$$

$$\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\ \ln e^x>\ln\left(2e^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x\ln e>\ln\left(2e^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x>\ln\left(2e^2\right),\text{ που ισχύει.}$$

Το $f\left(x_0\right)$ δεν είναι ελάχιστο της συνάρτησης γιατί, από την παραπάνω απόδειξη, η σχέση $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$ αληθεύει μόνο στο διάστημα $\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$ και όχι σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.