

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
**Β΄ ΦΑΣΗ**

**E\_3, ΒΜλ2Θ(ε)**

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 26 Απριλίου 2015**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου και  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του μέσου  $M$  του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ . Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

**Μονάδες 9**

**A2.** Να δώσετε το ορισμό του εσωτερικού γινομένου  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . Πώς ορίζουμε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  όταν  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$ ;

**Μονάδες 6**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $\vec{\alpha} = (x, y)$  είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε σε κάθε περίπτωση ο συντελεστής του,  $\lambda_{\vec{\alpha}}$ , είναι ίσος με το ημίτιλο  $\frac{y}{x}$ .

**β)** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ . Τότε ισχύει ότι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$ .

**γ)** Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ .

**δ)** Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\widehat{xOy}$  και  $\widehat{yOx'}$  των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, έχουν εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$  αντιστοίχως.

**ε)** Η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$ , έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 10**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.BMλ2Θ(ε)**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση:  $3x + 4y = 12$ .

**B1.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\zeta$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon$  και διέρχεται από το σημείο  $A\left(2, -\frac{9}{2}\right)$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας  $\eta$  των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\zeta$ .

**Μονάδες 9**

**B3.** Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B$  και η ευθεία  $\zeta$  τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $\Gamma$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω  $\vec{\alpha} = (x, 4y)$ ,  $\vec{\beta} = (-x, 2)$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ , δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

**Γ1.** Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$  είναι η παραβολή  $C$ , με εξίσωση:  $x^2 = 8y$ , της οποίας να βρείτε την εστία  $E$  και την διευθετούσα  $\delta$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** i) Να βρείτε τις εξισώσεις  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  των εφαπτομένων στην παραβολή  $C$ , στο σημείο  $N\left(x_1, \frac{x_1^2}{8}\right)$ ,  $x_1 \neq 0$ , οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A(1, -1)$ .

**Μονάδες 6**

ii) Να δείξετε ότι για την αμβλεία γωνία  $\omega$  των εφαπτομένων  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , ισχύει:

$$\sin \omega = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Δίνεται, επιπλέον, σημείο  $B(x_0, y_0)$  της παραβολής  $C$ , με  $x_0 < 0$  που απέχει από την διευθετούσα  $\delta$  αυτής απόσταση ίση με 10. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C_1$ , ο οποίος έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία  $E$  και  $B$ .

**Μονάδες 8**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
**Β΄ ΦΑΣΗ**

**E\_3.BMλ2Θ(ε)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0, (1)$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο  $C_\lambda$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $C_\lambda$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , διέρχονται από δύο σταθερά σημεία  $A$  και  $B$ , των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

**Μονάδες 4**

ii) Αν  $A(1,0)$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C_\lambda$  στο σημείο  $A$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης  $C$ , με εστίες τα σημεία  $A, B$  και εκκεντρότητα  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν  $M$  είναι ένα κοινό σημείο των  $C_\lambda, C$ , να υπολογίσετε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε:  $(MA) + (MB) = 2(MK)$ .

**Μονάδες 5**