

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Τετάρτη 7 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 43 σχολικού Βιβλίου.

- A2.**
- α) Σ
 - β) Λ
 - γ) Λ
 - δ) Σ
 - ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις:
$$\begin{cases} \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (0,5) & (1) \\ 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3,1) & (2) \end{cases}$$
 προκύπτει:

$$3\vec{\alpha} = (3,1) + (0,5) \Leftrightarrow 3\vec{\alpha} = (3+0,1+5) \Leftrightarrow 3\vec{\alpha} = (3,6) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{3} \cdot (3,6) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \left(\frac{1}{3} \cdot 3, \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha} = (1,2)}$$

Η σχέση (1) για $\vec{\alpha} = (1,2)$ γίνεται:

$$(1,2) + \vec{\beta} = (0,5) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (0,5) - (1,2) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (0-1,5-2) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta} = (-1,3)}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΑΜΛ2ΘΤ(α)

B2.

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{x_{\vec{\alpha}} \cdot x_{\vec{\beta}} + y_{\vec{\alpha}} \cdot y_{\vec{\beta}}}{\sqrt{x_{\vec{\alpha}}^2 + y_{\vec{\alpha}}^2} \cdot \sqrt{x_{\vec{\beta}}^2 + y_{\vec{\beta}}^2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{25}} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot 5} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$$

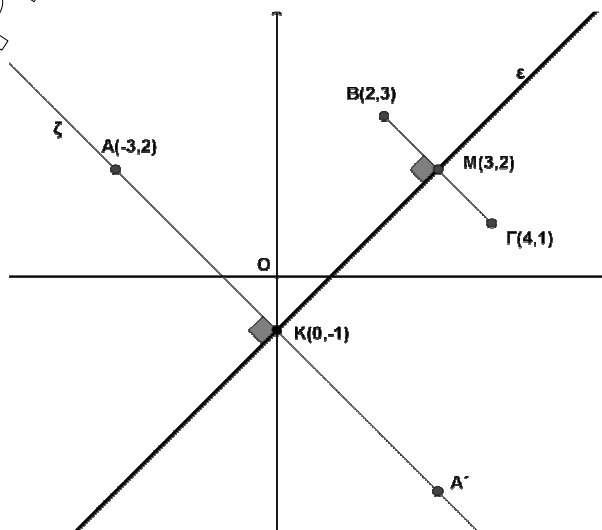
B3. Ισχύει: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$ (1)

όμως $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως η (1) γίνεται:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \cdot |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow 5 = \lambda \cdot 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα: } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot (-1, 3) \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

ΘΕΜΑ Γ



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΑΜλ2ΘΤ(α)

Γ1. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}$.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2 + 3, 3 - 2) = (5, 1)$$

$$\overline{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (4 - 2, 1 - 3) = (2, -2)$$

$$\text{Επομένως } \det(\overline{AB}, \overline{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 2 = -12 \neq 0, \text{ άρα τα διανύσματα } \overline{AB}, \overline{B\Gamma}$$

δεν είναι παράλληλα, οπότε τα Α, Β και Γ όχι συνευθειακά.

Γ2. Η μεσοκάθετος (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ διέρχεται από το μέσο του Μ και το τέμνει κάθετα.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Μ:

$$x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow x_M = \frac{2 + 4}{2} \Leftrightarrow x_M = 3, \quad y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow y_M = \frac{3 + 1}{2} \Leftrightarrow y_M = 2$$

Άρα, Μ(3, 2). Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{1 - 3}{4 - 2} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = -1$$

$$\text{Ισχύει } (\varepsilon) \perp (B\Gamma) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1.$$

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι:

$$(\varepsilon): y - y_M = \lambda_\varepsilon \cdot (x - x_M) \Leftrightarrow y - 2 = x - 3 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Γ3. Έστω Α' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία(ε).

Θα βρούμε την εξίσωση ευθείας (ζ) η οποία διέρχεται από το Α και τέμνει κάθετα την (ε).

Ισχύει: $(B\Gamma) \parallel (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -1$, επομένως η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$$(\zeta): y - y_A = \lambda_\zeta \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = -1 \cdot (x + 3) \Leftrightarrow y = -x - 1$$

Έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ), του οποίου οι συντεταγμένες θα βρεθούν λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών αυτών.

$$\text{Πράγματι } \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ -x - 1 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

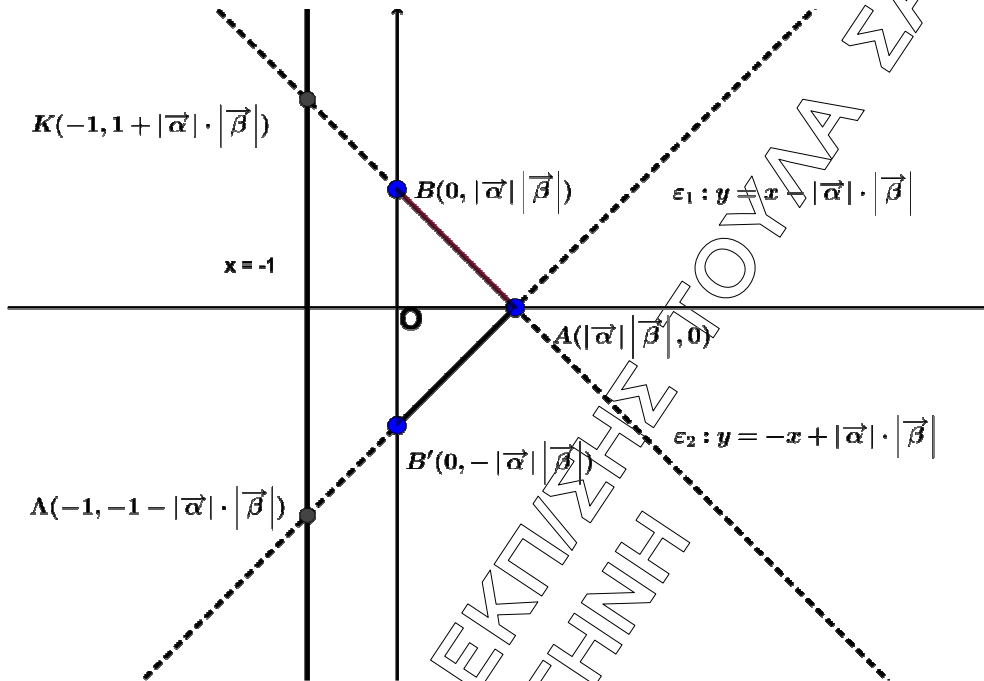
Άρα Κ(0, -1). Λόγω συμμετρίας το Κ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ'.

$$x_K = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{-3 + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 3 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = -4$$

Άρα το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το Α'(3, -4)

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Αφού το τρίγωνο OAB με $\hat{O} = 90^\circ$ είναι ισοσκελές έχουμε $(OA) = (OB)$, επομένως $\|\vec{a} \cdot \vec{\beta}\| = |\vec{a} \cdot \vec{\beta}|$ ή $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a} \cdot \vec{\beta}|$.

Αν φ είναι γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ η τελευταία ισότητα γράφεται:

$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = \|\vec{a} \cdot \vec{\beta}\| \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \cdot |\sin \varphi|$ από την οποία προκύπτει ότι $|\sin \varphi| = 1$, αφού τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και επομένως είναι $|\vec{a}| \neq 0$ και $|\vec{\beta}| \neq 0$. Άρα $(\sin \varphi = -1 \text{ ή } \sin \varphi = 1)$ (1) οπότε $\varphi = 180^\circ$ ή $\varphi = 0^\circ$.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$.

Δ2. Έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \varphi$. Από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ ή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ αντιστοίχως.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ είναι $B(0, |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|)$. Αναλόγως έχουμε:

$$\lambda_{AB} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| - 0}{0 - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} = -1.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΑΜΛ2ΘΤ(α)

$$\varepsilon_2: y-0 = -1(x - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_2: y = -x + |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|.$$

β) Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ είναι $B'(0, -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|)$. Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B' είναι

$$\lambda_{AB'} = \frac{-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| - 0}{0 - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = 1 \quad \text{και αφού διέρχεται από το A είναι}$$

$$\varepsilon_1: y-0 = 1(x - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_1: y = x - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

Δ3. Βρίσκω τα σημεία τομής Λ και Κ αντίστοιχα των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με την ευθεία $x = -1$.

Για $x = -1$ η (ε_1) γίνεται $y = -1 - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$. Άρα: $\Lambda(-1, -1 - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|)$.

Για $x = -1$ η (ε_2) γίνεται $y = 1 + |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$. Άρα: $\text{Κ}(-1, 1 + |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|)$.

Για χάρη ευκολίας θέτω $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = \kappa > 0$.

Άρα, $\Lambda(-1, -1 - \kappa), \text{Κ}(-1, 1 + \kappa)$ οπότε $\vec{ΟΛ} = (-1, -1 - \kappa), \vec{ΟΚ} = (-1, 1 + \kappa)$.

Ισχύει:

$$\vec{ΟΚ} \cdot \vec{ΟΛ} = -3 \Leftrightarrow (-1, 1 + \kappa) \cdot (-1, -1 - \kappa) = -3 \Leftrightarrow 1 + (1 + \kappa)(-1 - \kappa) = -3 \Leftrightarrow$$

$$1 - 1 - \kappa - \kappa - \kappa^2 = -3 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -3 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1 \quad \kappa > 0$$

Άρα $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = 1$, επομένως $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.