www.oefe.gr
08 επαναληπτικά θέματα

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 61.
β. Σχολικό βιβλίο σελίδες 60,61.

Β. α. (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Λ), **δ.** (Σ), **ε.** (Λ).

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

α. i) Έστω ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Τότε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma}$, οπότε $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = 0$.

Αλλά $\overrightarrow{AB} = (4-2,\ 5-0) = (2, 5)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4,\ \kappa-5) = (2, \kappa-5)$.

Άρα $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & \kappa-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(\kappa-5) - 5\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - 10 - 10 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 10$, που είναι άτοπο αφού $\kappa \neq 10$. Συνεπώς τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii) Αν Μ το μέσο της ΑΓ, τότε $M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+\kappa}{2}\right) = \left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$. Η ευθεία που διέρχεται από το Β(4, 5) και το $M\left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$ είναι προφανώς η (ε) : x = 4.

β. Από υπόθεση: $(AB\Gamma) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = 8$ (1)

Αλλά $\overrightarrow{AB} = (2, 5)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (6-2, \kappa-0) = (4, \kappa)$,οπότε η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & \kappa \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow |2\kappa - 20| = 16 \Leftrightarrow 2\kappa - 20 = 16$ ή $2\kappa - 20 = -16 \Leftrightarrow$ κ =18 ή κ = 2,

άρα Γ(6,18) ή Γ(6,2).

γ. Για κ = 2 είναι Γ(6,2)

<u>Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας (η) (εξίσωση ύψους):</u>

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{2-5}{6-4} = -\frac{3}{2} \text{ άρα } \lambda_{(η)} = \frac{2}{3} \text{ (αφού } \lambda_{(η)}\,\lambda_{ΒΓ} = -1\text{)}$$

και επειδή η (η) διέρχεται από το Α(2, 0) έχουμε:

$$\psi - 0 = \frac{2}{3}(x-2) \Leftrightarrow \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \text{ που είναι η εξίσωση της (η).}$$

<u>Για την εύρεση του σημείου Δ:</u>λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε), (η). Έτσι:

$$\begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3}4 - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ άρα } Δ\left(4, \frac{4}{3}\right).$$

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται: $(3-\mu)x^2 + (\mu+2)\psi^2 = (\mu+2)(3-\mu)$ και για να παριστάνει κύκλο, πρέπει (αρχικά) να ισχύει: $3-\mu = \mu+2$ δηλ. $\mu = \frac{1}{2}$. Η προηγούμενη εξίσωση για $\mu = \frac{1}{2}$, γίνεται:

$$\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}\psi^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = \frac{5}{2},$$

που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ= $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Επομένως $\mu = \frac{1}{2}$.

β. Για να παριστάνει έλλειψη η εξίσωση (1), θα πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} \mu+2 > 0 \\ 3-\mu > 0 \\ \mu+2 \neq 3-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -2 \\ \mu < 3 \\ \mu \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < \mu < 3 \text{ και } \mu \neq \frac{1}{2}, \text{άρα } \mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

γ. Για $\mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

i) Είναι: $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < \frac{5}{2}$ (2)

και $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 > -\mu > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\mu < 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} < 3 - \mu < 5$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < 3 - \mu < 5$ (3).

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι 3 – μ > μ + 2 , οπότε $\alpha^2 = 3 - \mu$ και $\beta^2 = \mu + 2$, δηλαδή η έλλειψη έχει τη μορφή $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 1$, επομένως οι εστίες της βρίσκονται πάνω στον άξονα ψ΄ψ.

ii) Έχουμε $\alpha^2 = 3 - \mu$, $\beta^2 = \mu + 2$ άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (3-\mu) - (\mu + 2) = 1 - 2\mu$.
Για την εκκεντρότητα ε της έλλειψης ισχύει:
$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{1-2\mu}{3-\mu} \Leftrightarrow 4 - 8\mu = 9 - 3\mu \Leftrightarrow \mu = -1$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Για Α(–1,ψ) και Β(2x,ψ) με Ο(0,0) έχουμε $\overrightarrow{OA} = (-1, \psi)$ και $\overrightarrow{OB} = (2x, \psi)$ οπότε:

Α. Αφού $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, τότε $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot 2x + \psi \cdot \psi = 0 \Leftrightarrow \psi^2 = 2x$ που είναι εξίσωση παραβολής C_1 με 2ρ = 2 $\Leftrightarrow$ ρ = 1, συνεπώς η εστία είναι το σημείο $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ ή $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα δ είναι η ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\rho}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$.

Β. Έχουμε $\overrightarrow{OB}^2 + 3\overrightarrow{OA}^2 = 15 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + 3\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = 15 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2x)^2 + \psi^2}^{\,2} + 3\sqrt{(-1)^2 + \psi^2}^{\,2} = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + \psi^2 + 3(1 + \psi^2) = 15$, άρα

$4x^2 + \psi^2 + 3 + 3\psi^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + 4\psi^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = 3$ που είναι εξίσωση κύκλου C_2 ,με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα $R = \sqrt{3}$.

Γ. α) Για τα κοινά σημεία των C_1, C_2 λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + \psi^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \psi^2 = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -3 \\ \psi^2 = -6 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο, επομένως έχουμε : $\begin{cases} x = 1 \\ \psi = \sqrt{2} \quad ή \quad \psi = -\sqrt{2} \end{cases}$. Άρα τα κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι το $K(1, \sqrt{2})$ και το $\Lambda(1, -\sqrt{2})$.

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο $K\left(1, \sqrt{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$$ψψ_1 = ρ(x + x_1) \text{ ή } ψ\sqrt{2} = 1(x + 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}ψ = x + 1 \Leftrightarrow ψ = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

Η εφαπτομένη του C_2 στο $Λ\left(1, -\sqrt{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$$xx_2 + ψψ_2 = 3 \text{ ή } x + ψ\left(-\sqrt{2}\right) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}ψ = x - 3 \Leftrightarrow ψ = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Οι ευθείες που παριστάνουν οι (1), (2) έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ($λ=\frac{\sqrt{2}}{2}$), άρα οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.