

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΑΜΕΛ3Α(α)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 7 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σε ποσοτική μεταβλητή, αθροιστική συχνότητα μιας τιμής x_i λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων v_i των τιμών που είναι μικρότερες ή ίσες με την τιμή αυτή.

A2.

1. Δ
2. Δ
3. Σ
4. Δ
5. Σ

A3.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell|$.

2. $\frac{N_i}{v} = F_i$.

3. $\sqrt{\frac{v_1(\bar{x} - x_1)^2 + v_2(\bar{x} - x_2)^2 + \dots + v_k(\bar{x} - x_k)^2}{v}} = s$.

4. Η διαφορά της μικρότερης τιμής της μεταβλητής από τη μεγαλύτερη λέγεται *εύρος*.

5. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας, που μετράει την ομοιογένεια ενός πληθυσμού, είναι 10%, τότε ο πληθυσμός θεωρείται *ανομοιογενής*.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΑΜΕΛ3Α(α)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αριθμός φρούτων x_i	Συχνότητα v_i	K_i	$K_i \cdot v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
[0,2)	6	1	6	15	16	96
[2,4)	α	3	3α	20	4	32
[4,6)	10	5	50	25	0	0
[6,8)	12	7	84	30	4	48
[8,10)	4	9	36	10	16	64
ΣΥΝΟΛΑ	$32+\alpha$		$176+3\alpha$	100		240

$$\bar{x} = \frac{176+3\alpha}{32+\alpha} = 5 \Leftrightarrow 5(32+\alpha) = 176+3\alpha \Leftrightarrow 160+5\alpha = 176+3\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha - 3\alpha = 176 - 160 \Leftrightarrow 2\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Β2. Κάτω από 6 φρούτα την ημέρα τρώνε $v_1 + v_2 + v_3 = 6 + 8 + 10 = 24$ μαθητές.

Β3. Το ποσοστό των μαθητών που τρώει τουλάχιστον 8 φρούτα την εβδομάδα είναι $f_5 = 10\%$.

Β4. $s^2 = \frac{240}{40} = 6$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \dots = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$, αφού η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα $x = 2$.

$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1)$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x^2 + 1} = \frac{2 - 2}{2^2 + 1} = \frac{0}{5} = 0$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [\alpha x + (x^2 - 1)\beta - 7] = \alpha \cdot 2 + (2^2 - 1)\beta - 7 = 2\alpha + 3\beta - 7$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.ΑΜΕΛ3Α(α)

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x=2$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \quad (I)$$

$$(I) \Rightarrow 2\alpha + 3\beta - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 3\beta = 7$$

$$f(4) = 34 \Leftrightarrow 4\alpha + (4^2 - 1)\beta - 7 = 34 \Leftrightarrow 4\alpha + 15\beta = 34 + 7 \Leftrightarrow 4\alpha + 15\beta = 41$$

$$2\alpha + 3\beta = 7 \quad -4\alpha - 6\beta = -14$$

$$4\alpha + 15\beta = 41 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha + 15\beta = 41$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$9\beta = 27 \Leftrightarrow \beta = \frac{27}{9} \Leftrightarrow \beta = 3. \text{ Και με αντικατάσταση σε μια από τις δύο}$$

εξισώσεις:

$$2\alpha + 3 \cdot 3 = 7 \Leftrightarrow 2\alpha = 7 - 9 \Leftrightarrow 2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Γ4. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [\alpha x + (x^2 - 1)\beta - 7] = (-1) \cdot 3 + (3^2 - 1)3 - 7 = -3 + 8 \cdot 3 - 7 =$
 $= 24 - 10 = 14$

Γ5. Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα y στο σημείο με τετμημένη $x=0$. Επομένως:

$$f(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 4}{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Άρα το σημείο είναι το $(x, y) = (0, -2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\frac{-}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^4 - 25x^3}{\sqrt{5x-4} - 1} = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\frac{-}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^4 - (25x^3)}{\sqrt{5x-4} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(x-1)(\sqrt{5x-4}+1)}{(\sqrt{5x-4}-1)(\sqrt{5x-4}+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(x-1)(\sqrt{5x-4}+1)}{(\sqrt{5x-4})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(x-1)(\sqrt{5x-4}+1)}{5x-4-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(x-1)(\sqrt{5x-4}+1)}{5x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(x-1)(\sqrt{5x-4}+1)}{5(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x^3(\sqrt{5x-4}+1)}{5} = \frac{25 \cdot 1^3 \cdot (\sqrt{5 \cdot 1 - 4} + 1)}{5} = \frac{25 \cdot 2}{5} = 10$$

Δ2. $\frac{-}{x} = 10 \Leftrightarrow \frac{7+10+13+15+\alpha}{5} = 10 \Leftrightarrow 45+\alpha = 50 \Leftrightarrow \alpha = 50-45 \Leftrightarrow \alpha = 5$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
 Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.ΑΜΕΛ3Α(α)

Δ3. Βάζοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 5, 7, 10, 13, 15 συμπεραίνουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή 10 (μεσαία παρατήρηση)

Δ4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{1 - \sqrt{2-x}} = \dots = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - 1)(1 + \sqrt{2-x})}{(1 - \sqrt{2-x})(1 + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{2-x})}{1^2 - (\sqrt{2-x})^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{2-x})}{1 - 2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{2-x})}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} [2(x+1)(1 + \sqrt{2-x})] = 2(1+1)(1 + \sqrt{2-1}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x-1} = \dots = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$3x^2 + 2x - 5 = 3(x-1)(x + \frac{5}{3})$, αφού η εξίσωση $3x^2 + 2x - 5 = 0$ έχει ρίζες τις

$x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)(x + \frac{5}{3})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [3(x + \frac{5}{3})] = 3(1 + \frac{5}{3}) = 3 + 5 = 8$$

$f(1) = 8 - 2 = 10 - 2 = 8$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 8$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 1$.