Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)

Β. **α.** ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)

Γ. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

Α. Πρέπει $\mathbf{x^2+1\ge 0}$, το οποίο ισχύει για κάθε $\mathbf{x\in R}$ έτσι $A=R$

Β. **α.** $$\mathbf{f'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)+x+\sqrt{\alpha+15}\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+1=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}}$$

β. $$\mathbf{\lim_{x\to-1}\left[f'(x)\frac{x^2+1}{x^2-x-2}\right]=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-x-2}\right)=}$$

$$\mathbf{\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{(x-2)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{-1+1}{-1-2}=\frac{0}{-3}=0}.$$

Γ. Έστω $\mathbf{M(x_0,f(x_0))}$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την $\mathbf{C_f}$.

Αφού $\mathbf{(\varepsilon)//(\eta)}$ πρέπει: $\mathbf{f'(x_0)=1\Rightarrow\frac{x_0^2+2x_0+1}{x_0^2+1}=1\Rightarrow x_0^2+2x_0+1=x_0^2+1\Rightarrow}$

$\mathbf{2x_0=0\Rightarrow x_0=0}$.

Αφού $\mathbf{f(0)=\ln 1+\sqrt{\alpha+15}=\sqrt{\alpha+15}}$, το σημείο επαφής είναι $\mathbf{M\left(0,\sqrt{\alpha+15}\right)}$

Έτσι $\mathbf{(\varepsilon): y=f'(0)\cdot x+\beta}$ δηλαδή $\mathbf{(\varepsilon): y=x+\beta}$

Όμως $\mathbf{M\in(\varepsilon)\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}=0+\beta\Rightarrow\beta=\sqrt{\alpha+15}}$ έτσι $\mathbf{(\varepsilon): y=x+\sqrt{\alpha+15}}$.

Δ. για $\mathbf{x_1=0}$ έχω $\mathbf{y_1=\sqrt{\alpha+15}}$
για $\mathbf{x_2=1}$ έχω $\mathbf{y_2=1+\sqrt{\alpha+15}}$
για $\mathbf{x_3=9}$ έχω $\mathbf{y_3=9+\sqrt{\alpha+15}}$
για $\mathbf{x_4=10}$ έχω $\mathbf{y_4=10+\sqrt{\alpha+15}}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$\sqrt{\alpha+15}$, $\sqrt{\alpha+15}+1$, $\sqrt{\alpha+15}+9$, $\sqrt{\alpha+15}+10$

$$\delta = \frac{\sqrt{\alpha+15}+1+\sqrt{\alpha+15}+9}{2} = \frac{2\sqrt{\alpha+15}+10}{2} = \sqrt{\alpha+15}+5$$

Αφού $\delta = 50 \Rightarrow \sqrt{\alpha+15}+5 = 50 \Rightarrow \sqrt{\alpha+15} = 45 \Rightarrow \alpha+15 = 2025 \Rightarrow \alpha = 2010$

ΘΕΜΑ 3

Α. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος **ν**, έτσι $\nu = 50$.

Β. Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Κλάσεις [-)	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0 - 4	2	4	0,08	8	4	0,08	8
4 – 8	6	7	0,14	14	11	0,22	22
8 – 12	10	18	0,36	36	29	0,58	58
12 – 16	14	13	0,26	26	42	0,84	84
16 - 20	18	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	**–**	**ν = 50**	**1**	**100**			

Αφού $\nu = 50 \Rightarrow N_4 + \nu_5 = 50 \Rightarrow 6\nu_2 + 8 = 50 \Rightarrow 6\nu_2 = 42 \Rightarrow \nu_2 = 7$

$N_4 = 42 \Rightarrow 4+7+18+\nu_4 = 42 \Rightarrow \nu_4 = 13$

Γ. **α.** **Α:** «ο μαθητής έχει βαθμό από **10** έως **17**» τότε

$N(A) = \frac{1}{2}\cdot\nu_3 + \nu_4 + \frac{1}{4}\cdot\nu_5 = 9+13+2 = 24$ οπότε

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{50} = 0{,}48$ ή **48%**

β. **Β:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από **10** ή τουλάχιστον **16**»

$N(B) = \nu_1 + \nu_2 + \frac{1}{2}\nu_3 + \nu_5 = 4+7+9+8 = 28$. Έτσι

$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{28}{50} = 0{,}56$ ή **56%**

ΘΕΜΑ 4

Α. Έχουμε : $2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(k) = \frac{P(\lambda)}{2} = \theta \in R$

Αφού $P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + 2\theta + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$P(\mu) = \frac{1}{2} - 3\theta \quad (1)$

Όμως $P(\Omega)=1 \Rightarrow P(2)+P(3)+P(6)+P(\kappa)+P(\lambda)+P(\mu)=1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\frac{\theta}{2}+3\theta+\theta+\theta+2\theta+\frac{1}{2}-3\theta=1 \Rightarrow$

$4\theta+\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{1}{9}$

Έτσι : $P(2)=\frac{1}{18}$, $P(3)=\frac{1}{3}$, $P(6)=\frac{1}{9}$, $P(\kappa)=\frac{1}{9}$, $P(\lambda)=\frac{2}{9}$, $P(\mu)=\frac{1}{6}$

Β. $\mathbf{f'(x)=\lambda x^2-24x+20}$

Αφού η **(ε) // (η)** $\Rightarrow \mathbf{f'(-1)=48 \Rightarrow \lambda+44=48 \Rightarrow \lambda=4}$

Έτσι $\mathbf{f'(x)=4x^2-24x+20}$

$\mathbf{f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2-24x+20=0 \Rightarrow x=1,\ x=5}$

x	$-\infty$ **1**	**5**	$+\infty$
f′(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

Άρα $\mathbf{\kappa=1}$ και $\mathbf{\mu=5}$

Έτσι $\mathbf{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}$

Γ. πρέπει $\begin{cases}\mathbf{2x-3\ge 0}\\ \mathbf{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5}\ne 0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{\sqrt{2x-3}\ne\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{2x-3\ne 5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{x\ne 4}\end{cases}$

και αφού $\mathbf{x\in\Omega}$ άρα: $\mathbf{x=2}$ ή $\mathbf{x=3}$ ή $\mathbf{x=5}$ ή $\mathbf{x=6}$

έτσι $\mathbf{B=\{2,3,5,6\}}$

Δ. Οι **4** παρατηρήσεις είναι τα $\mathbf{\frac{4}{160}=\frac{1}{40}=2{,}5\%}$ του συνόλου των παρατηρήσεων.

Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: $\mathbf{\bar{x}+2s=20}$ **(1)**

Όμως $\mathbf{R=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s=3\bar{x}}$ **(2)**

(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{24s=3(20-2s) \Rightarrow 24s=60-6s \Rightarrow 30s=60 \Rightarrow s=2}$

Έτσι από **(1)** $\Rightarrow \mathbf{\bar{x}+4=20 \Rightarrow \bar{x}=16}$

Παρατηρούμε ότι: $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}}$, έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω: $\mathbf{s'=s=2}$ και $\mathbf{\bar{x}'=\bar{x}+c=16+c}$.

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$\mathbf{CV'\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'}\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16+c}\le\frac{1}{10} \Rightarrow}$

$\mathbf{20\le 16+c \Rightarrow c\ge 4}$ και αφού $\mathbf{c\in\Omega}$ έχω: $\mathbf{c=4}$ ή $\mathbf{c=5}$ ή $\mathbf{c=6}$

Έτσι $\mathbf{\Gamma=\{4,5,6\}}$

Ε. Έχουμε: $\mathbf{A \cap \Gamma = \{4,5\}}$

$\mathbf{B - \Gamma = \{2,3\}}$

$\mathbf{A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}}$

$\mathbf{B \cup A' = \{2,3,5,6\}}$, αφού $\mathbf{A' = \{2,3,6\}}$

Έτσι $\mathbf{P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}}$

$\mathbf{P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}}$