Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 139.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 87.

Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

Γ. 1 Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4 Σ, 5 Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = (0, +\infty)$

β. Είναι

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$.

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και άρα δεν έχει ακρότατα.

δ. Με $x \neq 1$ είναι

$$\frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \frac{x\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 3}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2(x+1)$$

οπότε

$$\lim_{x \to 1} \frac{xf'(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} 2(x+1) = 4$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το εύρος του δείγματος είναι $R = 30-5 = 25$ και το πλάτος των κλάσεων είναι

$$c \cong \frac{R}{\kappa} = \frac{25}{5} = 5.$$

Έτσι οι κλάσεις είναι:

$$[5, 10),\ [10, 15),\ [15, 20),\ [20, 25),\ [25, 30)$$

με κεντρικές τιμές αντίστοιχα:

$$7{,}5,\ 12{,}5,\ 17{,}5,\ 22{,}5,\ 27{,}5$$

Από τα υπόλοιπα δεδομένα προκύπτουν κατά σειρά οι σχέσεις:

$$\nu_4 = 30\ (1),\quad \nu_2 = 4\,\nu_3\ (2),\quad f_1\% = 10\ (3)\quad \text{και}\quad \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 40\ (4)$$

Ακόμα:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu$$

$$\Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 80$$

$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \nu_1 + \nu_2 = 40\quad (5)$$

Είναι

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{\nu_1}{80}\cdot 100 \Leftrightarrow \nu_1 = 8,$$

και η (5) δίνει $\nu_2 = 32$. Από την (2) βρίσκουμε $\nu_3 = 8$ και από την (4) $\nu_5 = 2$, έτσι συμπληρώνουμε τη στήλη των ν_i: 8, 32, 8, 30, 2 με σύνολο 80.

Οι σχετικές συχνότητες $f_i\%$ προσδιορίζονται από τον τύπο $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ και

είναι κατά σειρά: 10, 40, 10, 37,5, 2,5 με σύνολο 100.

Οι αθροιστικές συχνότητες N_i προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$N_1 = \nu_1,\ N_i = N_{i-1} + \nu_i,\quad i = 2, 3, 4, 5$$

και είναι κατά σειρά: 8, 40, 48, 78, 80.

Πάλι, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες είναι:

$$F_1\% = f_1\%,\ F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%,\quad i = 2, 3, 4, 5$$

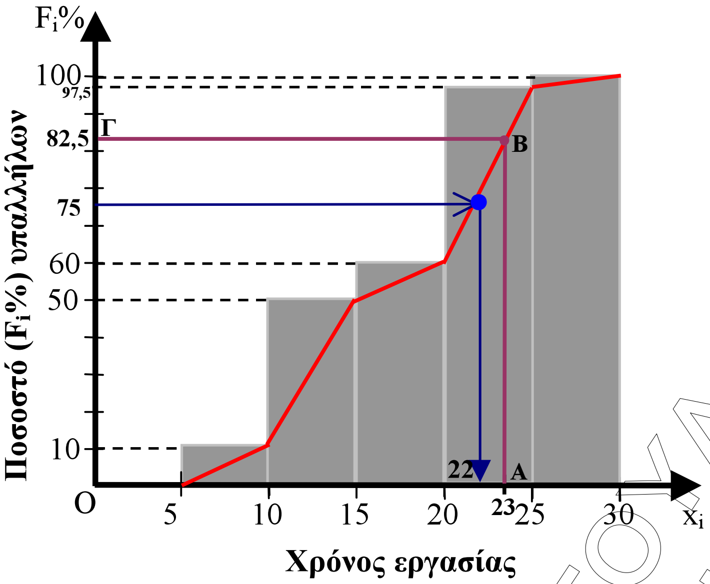
και βρίσκουμε κατά σειρά: 10, 50, 60, 97,5, 100.

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

Πίνακας συχνοτήτων

Κλάσεις [- , -)	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητες ν_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$	Αθροιστικές συχνότητες N_i	Αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$
[5, 10)	7,5	8	10	8	10
[10, 15)	12,5	32	40	40	50
[15, 20)	17,5	8	10	48	60
[20, 25)	22,5	30	37,5	78	97,5
[25, 30)	27,5	2	2,5	80	100
ΣΥΝΟΛΟ	—	80	100	—	—

β. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο φαίνονται στο σχήμα:



γ. 1^ος^ τρόπος. Το ζητούμενο ποσοστό βρίσκεται από το πολύγωνο συχνοτήτων από τη διαδρομή ΑΒΓ. Ξεκινώντας από το σημείο Α(23, 0) πηγαίνουμε κάθετα στον άξονα Οx μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά παράλληλα στον άξονα Οx μέχρι το σημείο Γ(0, 82,5). Η τεταγμένη 82,5 του Γ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

2^ος^ τρόπος. Το πλάτος του διαστήματος [20, 23) είναι τα $\frac{3}{5}$ του πλάτους της κλάσης [20, 25), επομένως το ποσοστό των υπαλλήλων που αντιστοιχεί στο διάστημα [20, 23) είναι τα $\frac{3}{5}$ του f_4%, δηλαδή, $\frac{3}{5}\cdot 37{,}5 = 22{,}5$ Έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + 22{,}5\% = 82{,}5\%$$

δ. 1^ος^ τρόπος. Επειδή $60 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 12$, οι 60 υπάλληλοι με τα λιγότερα χρόνια εργασίας είναι αυτοί που ανήκουν στις τρεις πρώτες κλάσεις και οι πρώτοι 12 της τέταρτης κλάσης οι οποίοι καλύπτουν διάστημα πλάτους $\frac{12}{30}\cdot 5 = 2$. Επομένως τα ζητούμενα χρόνια είναι 20+2=22.

2^ος^ τρόπος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με την παρατήρηση ότι οι 60 υπάλληλοι είναι το 75% του συνόλου, και εργαστούμε με το αθροιστικό διάγραμμα (μπλε διαδρομή στο σχήμα), όπως υποδεικνύει το σχολικό βιβλίο στην εφαρμογή της σελίδας 77

ΘΕΜΑ 4ο

Η ισότητα $N(A) - N(B) = \frac{1}{5}N(\Omega)$ δίνει $\frac{N(A)}{N(\Omega)} - \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}$ ή $P(A) - P(B) = \frac{1}{5}$ ή

$$P(A) = P(B) + \frac{1}{5} \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι, $P(B) < P(A)$. Επειδή

$$A \cap B \subseteq B \;\text{ και }\; A \subseteq A \cup B$$

έχουμε

$$P(A \cap B) \le P(B) \;\text{ και }\; P(A) \le P(A \cup B)$$

Επομένως

$$P(A \cap B) \le P(B) < P(A) \le P(A \cup B) \qquad \textbf{(2)}$$

οπότε

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) \qquad \textbf{(3)}$$

α. Από την (2) είναι:

$$P(A \cap B) < P(A \cup B) \Leftrightarrow 0 < P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0 < R$$

Ακόμα

$P(A \cup B) \le 1$ και $P(A \cap B) \ge 0$, οπότε $P(A \cup B) - P(A \cap B) \le 1 \Leftrightarrow R \le 1$

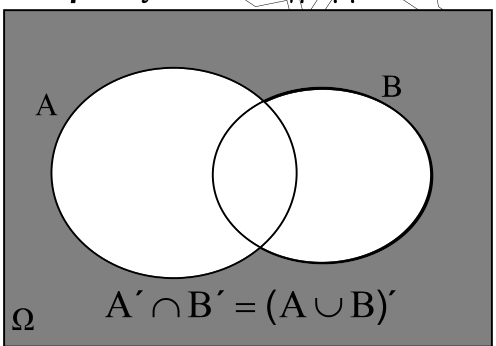
Άρα

$$0 < R \le 1$$

β. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned}
R = P(A \cup B) - P(A \cap B) &= [\, P(A) + P(B) - P(A \cap B) \,] - P(A \cap B) \\
&= [\, P(A) - P(A \cap B) \,] + [\, P(B) - P(A \cap B \,] \\
&= P(A - B) + P(B - A) \\
&= P(A - B) + P(B \cap A') \qquad [\text{ τύπος: } B - A = B \cap A' \,] \\
&= P(A - B) + P(A' \cap B) \\
&= P(A - B) + P(A' \cap (B')') \\
&= P(A - B) + P(A' - B')
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Από διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι $A' \cap B' = (A \cup B)'$



Είναι:

$$\begin{aligned}
P(A - B) + P(A' - B') &= P(A - B) + P(A') - P(A' \cap B') \\
&= [P(A) - P(A \cap B)] + [1 - P(A)] - [\, 1 - P(A \cup B)] \\
&= P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B)] \\
&= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\
&= R
\end{aligned}$$

Β α. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ή

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5P(A \cap B) + 3 \qquad \textbf{(4)}$$

Με $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x-1} \overset{(1)}{=} \frac{5\left[P(B) + \frac{1}{5}\right]x - 5P(B) - 1}{x-1}$$

$$= \frac{5P(B)x + x - 5P(B) - 1}{x-1}$$

$$= \frac{5P(B)(x-1) + x - 1}{x-1} = \frac{(x-1)[5P(B)+1]}{x-1}$$

$$= 5P(B) + 1$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}[5P(B)+1] = 5P(B)+1$$

και η (4) δίνει, τελικά, το ζητούμενο: $5P(B) + 1 = 5\,P(A\cap B) + 3$ ή

$$P(B) = P(A\cap B) + \frac{2}{5} \qquad (5)$$

β. Η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$P(A) = P(A\cap B) + \frac{3}{5}$$

Από την (3) προκύπτει:

$$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) = [\,P(A) + P(B) - P(A\cap B)] - P(A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$$

$$= P(A\cap B) + \frac{3}{5} + P(A\cap B) + \frac{2}{5} - 2P(A\cap B)$$

$$= 1$$

γ. **Α**ν υποθέσουμε ότι $P(A\cup B) < 1$, τότε θα είναι

$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) < 1$, άτοπο, από το Ββ,

και επειδή $P(A\cup B) \leq 1$ απομένει:

$$P(A\cup B) = 1.$$

Τέλος

$$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A\cap B) = 0.$$