ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015

Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΤΟΥΜΑ ΣΑΡΡΗ ΚΟΜΟΤΗΝΗ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

Α2. Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ;

Μονάδες 3

Α3. Πότε μια συνάρτηση f (θα λέμε ότι) είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστή, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

α. Για κάθε $z, w \in C$ ισχύει: $z = w \Leftrightarrow |z| = |w|$.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η γραφική παράστασή της τέμνει την $y = x$ στο σημείο Α, τότε η γραφική παράσταση, της αντίστροφης της διέρχεται από το σημείο Α.

γ. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) < \ell$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \ell$.

δ. Αν για την συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 5$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 5$.

ε. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΤΟΥΛΑ ΣΑΡΡΗ ΚΟΜΟΤΗΝΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = -\ln x$.

Β 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.

Μονάδες 8

Β 2. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $\mathrm{A}(1, g(1))$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g^{-1}.

Μονάδες 9

Β 3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = \ln x - e^{-x}$.

Μονάδες 4

Β 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{αν } x > \alpha \\ g^{-1}(x) & \text{αν } x \leq \alpha \end{cases}$ με $\alpha > 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha > 0$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο α.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση h με $h(x) = x^3 + e^x$ ώστε:

- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(f(0) - f(1)) \cdot x^5 + x^3 + 1}{f^2(1) \cdot x^2 + x + 1} = -\infty$
- ✓ $(g \circ g)(x) = f(0) \cdot g^3(x) + f(1) \cdot f\left(x^3 + e^x + 2015\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ✓ Η f γνησίως μονότονη.

Γ 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα (*Μονάδες 4*) και ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα (*Μονάδες 2*).

Μονάδες 6

Γ 2. Να δείξετε ότι η g είναι <<1 – 1>>.

Μονάδες 9

Γ 3. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(0) \cdot x^4 + x^2}{f(1) \cdot x^2 + x + 1} + \eta\mu x \right) = +\infty.$$

Μονάδες 10

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΤΟΥΛΑ ΣΑΡΡΗ ΚΟΜΟΤΗΝΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο μιγαδικός z που ικανοποιεί τη $\dfrac{-2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}+|w|=0,\ z\neq 0$ όπου w η ρίζα της $w^2-\sqrt{3}\cdot w+1=0$ με φανταστικό μέρος θετικό.

Δ1. Να δείξετε ότι $w^{1821}=-i$ και ότι $|w|=1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι $|z-1|=1$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

Μονάδες 4

Δ3. **α.** Αν ισχύει $z\cdot u=1+i$ να δείξετε ότι η εικόνα του u ανήκει πάνω σε ευθεία με εξίσωση $x+y-1=0$.

Μονάδες 4

β. Να βρεθεί ο μιγαδικός u που ελαχιστοποιεί την παράσταση $|z-1+z\cdot u-u|$ και η αντίστοιχη τιμή του z.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{|z+\bar{z}-2|-2}{x}=\dfrac{|z-\bar{z}|-2}{1-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$, όπου $z=\alpha+\beta i,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0$ και $\alpha\neq 1$.

Μονάδες 9