επαναληπτικά θέματα 07
ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1ο

Α. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ ισχύει $f(x) \le \kappa$ όπου $\kappa \in \Re$ για κάθε $x \in A$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f.

2. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

4. Αν για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ, τότε για κάθε $\lambda \in \Re$ ισχύει: $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx < \int_a^\beta g(x)dx$.

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x^2+a)\cdot e^{-x}$, $x\in\Re$. Αν η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{M}\left(0,f\left(0\right)\right)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a=2$.

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\Re$.

Μονάδες 6

Θέμα 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $z\cdot w\neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left|z+w\right|=\left|z-w\right|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$.

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή Ο των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο 0.

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[a,\beta\right]$ με $0<a<\beta$ και $z=a+i\cdot f\left(a\right)$, $w=f\left(\beta\right)-\beta i$ τότε η εξίσωση $x\cdot f'\left(x\right)=f\left(x\right)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $\left(a,\beta\right)$.

Μονάδες 7

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ όπου $t,x\in\Re$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{1+x^2}\leq g\left(x\right)\leq x$ για κάθε $x\geq 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι: $g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$ για κάθε $x\in\Re$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ είναι $E = g(1) - \frac{1}{2}\ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις