Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σελίδα 43 Σχολικού Βιβλίου.
Β. Σελίδα 89 Σχολικού Βιβλίου.
Γ. **α)** Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν συντεταγμένες:
$\overrightarrow{AB} = (-1+5,-2-3) = (4,-5)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (4+1,2+2) = (5,4)$.
Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 4\cdot 5+(-5)\cdot 4 = 20-20 = 0$, επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι κάθετα.

β. <u>Πρώτος τρόπος</u>
Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{A\Gamma} = (4+5,2-3) = (9,-1)$.
Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1)-9(-5) = -4+45 = 41$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2}|41| = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

<u>Δεύτερος τρόπος :</u>
Αφού $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Β, άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{B\Gamma}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-5)^2}\sqrt{5^2+4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{41}\sqrt{41} = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

γ. <u>Πρώτος τρόπος :</u>
Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι αντίστοιχα:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{9^2+(-1)^2} = \sqrt{82} = \sqrt{2}\sqrt{41}$
Το συνημίτονο της γωνίας φ είναι:

$$\text{συνφ} = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{A\Gamma}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|} = \frac{4\cdot 9+(-5)\cdot(-1)}{\sqrt{2}\sqrt{41}\sqrt{41}} = \frac{41}{41\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, $\varphi = 45^o$, επειδή $0^o \leq \varphi \leq 180^o$.

<u>Δεύτερος τρόπος :</u>

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{41}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\varphi = 45^o$.

ΘΕΜΑ 3^o

α. Η (1) ισοδυναμεί με την εξίσωση: $(1+\kappa)x + (1-\kappa)y + (1-5\kappa) = 0$.
Οι συντελεστές των x,y δεν μηδενίζονται για την ίδια τιμή του κ.
Πράγματι, ο συντελεστής του x μηδενίζεται για κ = –1, ενώ ο συντελεστής του y μηδενίζεται για κ = 1.
Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in R$.

β. Θέτουμε στην (1), x = 2 και y = –3, οπότε προκύπτει:
$0 + \kappa \cdot 0 = 0$, που ισχύει για κάθε $\kappa \in R$.
Άρα όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1), διέρχονται από το Α(2,–3).

γ. $(1+\kappa)x + (1-\kappa)y + (1-5\kappa) = 0$.

Η εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη στον x΄x, αν $\begin{cases} 1+\kappa \neq 0 \\ 1-\kappa = 0 \end{cases}$, άρα, κ = 1.

Η (1) για κ = 1, γίνεται: 2x–4 = 0 ή x = 2.

δ. Κ είναι η προβολή του Α στον x΄x, άρα $x_0 = 2$. Έχουμε Κ(2,0), άρα Ε(–2,0) Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η παραβολή C, με εστία Ε(–2,0) και διευθετούσα την ευθεία ε: x = 2.

($\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση $C: y^2 = -8x$
Η εξίσωση της παραβολής, δεν είναι απαραίτητο, να βρεθεί.)

ΘΕΜΑ 4^o

α. Στην εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda+4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$ έχουμε:

$A = -(\lambda+4)$, $B = \lambda$, $\Gamma = 2\lambda$, οπότε:

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda+4)^2 + \lambda^2 - 8\lambda = 2(\lambda^2+8) > 0$, για κάθε $\lambda \in R$ και επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Για το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου ισχύουν:

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και $R = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$, επομένως $K\left(\frac{\lambda+4}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ και

$$R = \frac{\sqrt{2(\lambda^2+8)}}{2}.$$

β. Έστω $K(x,y)$ το κέντρο του κύκλου (1), τότε (από α ερώτημα):

$$x = \frac{\lambda+4}{2} \text{ και } y = -\frac{\lambda}{2}$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda + 4}{2} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda + 4 \\ 2y = -\lambda \end{cases}$

Απαλείφουμε το λ από τις εξισώσεις και βρίσκουμε $2x + 2y - 4 = 0$ ή ισοδύναμα $x + y - 2 = 0$.

Άρα το κέντρο K του κύκλου (1) κινείται στην ευθεία $x + y - 2 = 0$.

γ. Έχουμε $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$. Ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, οπότε $\beta^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 - 12 \Leftrightarrow \beta^2 = 4$.

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης C είναι: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, εφόσον οι εστίες της Ε΄, Ε βρίσκονται στον άξονα $y'y$.

δ. Η εξίσωση (1) της υπόθεσης για $\lambda = 0$ γίνεται $x^2 + y^2 - 4x = 0$ που είναι η εξίσωση του κύκλου C_1 με κέντρο το σημείο $K_1(2, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της έλλειψης C στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ είναι:

$\dfrac{x\,x_1}{4} + \dfrac{y\,y_1}{16} = 1$ ή ισοδύναμα $4\,x\,x_1 + y\,y_1 - 16 = 0$.

Η ε εφάπτεται και του κύκλου C_1, άρα ισχύει: $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$, (2).

i. Από την σχέση (2) έχουμε ισοδύναμα $\dfrac{|4 \cdot 2 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 - 16|}{\sqrt{(4x_1)^2 + y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow$

$8|x_1 - 2| = 2\sqrt{16x_1^2 + y_1^2} \Leftrightarrow 16(x_1 - 2)^2 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow$

$16x_1^2 - 64x_1 + 64 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow y_1^2 = 64(1 - x_1)$.

ii. Το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, άρα,

$\dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 4x_1^2 + y_1^2 = 16 \Leftrightarrow y_1^2 = 16 - 4x_1^2$ (3).

Έτσι η σχέση $y_1^2 = 64(1 - x_1)$ λόγω της (3), γράφεται:

$16 - 4x_1^2 = 64(1 - x_1) \Leftrightarrow 4x_1^2 - 64x_1 + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0$ (4)

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$ και $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$ είναι μεταξύ τους κάθετα, όταν:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ ή ισοδύναμα $x_1 \cdot x_1 + 4 \cdot (3 - 4x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0$,

που ισχύει λόγω της (4).