



## Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα  $y'y$  και έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1, \lambda_2$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής, με εστία το σημείο  $E$  και διευθετούσα την ευθεία  $\delta$ .

**Μονάδες 5**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα.

**β)** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

**γ)** Η απόσταση της αρχής  $O$  των συντεταγμένων από την ευθεία  $\epsilon$  με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$ , ισούται με  $\frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

**δ)** Η εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a+1)^2} = 1$ , όπου  $a > 0$ , παριστάνει έλλειψη με εστίες πάνω στον άξονα  $x'x$ .

**ε)** Η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι πραγματικός αριθμός, μικρότερος της μονάδας.

**Μονάδες 5x2**

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σημεία  $A(-5,3)$ ,  $B(-1,-2)$  και  $\Gamma(4,2)$  του καρτεσιανού επιπέδου.

**α.** Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$ . Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για τα διανύσματα  $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$ ;

**Μονάδες 8**

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**Μονάδες 8**

**γ.** Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\varphi$  των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{A\Gamma}$  ισούται με  $45^\circ$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $(x+y+1) + κ(x-y-5) = 0$  (1), όπου  $κ ∈ ℝ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $κ$  η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή. **Μονάδες 7**
- β. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1), διέρχονται από το σημείο  $A(2,-3)$ . **Μονάδες 4**
- γ. Να βρείτε την τιμή του  $κ$ , για την οποία η (1) παριστάνει ευθεία  $ε$  κάθετη στον άξονα  $x'x$ . Ποια η εξίσωση της ευθείας  $ε$ ; **Μονάδες 5**
- δ. Αν  $K(x_0, 0)$  είναι η προβολή του σημείου  $A(2,-3)$  στον άξονα  $x'x$ , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο  $E(-x_0, 0)$  και την ευθεία  $ε$  του ερωτήματος. **Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - (λ+4)x + λy + 2λ = 0$  (1), όπου  $λ ∈ ℝ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $λ$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $ρ$ . **Μονάδες 8**
- β. Να δείξετε ότι το κέντρο  $K$  του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1), κινείται σε μια ευθεία γραμμή, καθώς το  $λ$  μεταβάλλεται στο  $ℝ$ . **Μονάδες 4**
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης  $C$ , που έχει εστίες τα σημεία  $E'(0, -2\sqrt{3})$ ,  $E(0, 2\sqrt{3})$  και μεγάλο άξονα  $(A'A) = 8$ . **Μονάδες 5**
- δ. Αν η εφαπτομένη  $ε$  της έλλειψης  $C$  του ερωτήματος γ, στο σημείο της  $M_1(x_1, y_1)$  εφάπτεται και του κύκλου  $C_1$ , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) για  $λ = 0$ , να δείξετε ότι:
- i.  $y_1^2 = 64(1 - x_1)$  **Μονάδες 4**
- ii. Τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$  και  $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$  είναι μεταξύ τους κάθετα. **Μονάδες 4**

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**