Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 85
Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150
Γ. 1.Γ – 2.Α – 3.Α,Γ – 4.Α,Δ,Δ

ΘΕΜΑ 2ο

i) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(x+1)^2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-x^2-2x-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+x+x\right)}=\frac{-2}{2\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

άρα $-\dfrac{1}{2\lambda}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 2\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=2$

ii) $f(x)=\lambda x^3-6x+\mu$. $A_f=R$. Για λ=2: $f(x)=2x^3-6x+\mu$

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με : $f'(x)=6x^2-6$.

Είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow 6(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

Και : $f'(x)>0\Leftrightarrow 6(x-1)(x+1)>0$

	-1		1	
+		-		+

οπότε x < -1 ή x > 1

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+		-	+
f	↗		↘	↗

Η f παρουσιάζει μέγιστο για x = -1, το $f(-1)=-2+6+\mu=\mu+4$

Οπότε : μ + 4 = 9 ⇔ μ = 5

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$. Οπότε, τα ζητούμενα σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Είναι : $f(-1) = 9 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(1) = 1$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι : Β(-1,9) και Γ(1,1).

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της f συναρτήσει του x είναι: $f'(x) = 6x^2 - 6$

Είναι: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f'	↘		↗

Η f' παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0 οπότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για x = 0

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

i)

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων ν_i	f_i	f_i %	N_i	F_i	F_i %	$x_i \nu_i$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
1	50	0,125	12,5	50	0,125	12,5	50	200
2	110	0,275	27,5	160	0,4	40	220	110
3	120	0,3	30	280	0,7	70	360	0
4	30	0.075	7,5	310	0,775	77,5	120	30
5	90	0,225	22,5	400	1	100	450	360
ΣΥΝΟΛΑ	ν = 400	1	100				1200	700

ii) Η μέση τιμή είναι : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{400} = \dfrac{1200}{400} = 3$

Αφού ν = 400 (άρτιος), η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν αυτές έχουν διαταχθεί κατ' αύξουσα σειρά.

Δηλαδή: $\delta = \dfrac{t_{200} + t_{201}}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3$

iii) Η διακύμανση είναι : $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{400} = \dfrac{700}{400} = \dfrac{7}{4}$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Τέλος ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{7}}{6} > \dfrac{0,6}{6} = \dfrac{1}{10}$

αφού $\sqrt{7} > 0,6$.

Οπότε $CV > \dfrac{1}{10}$ δηλ. CV>10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β. Το πολύ δύο επιβάτες έχουν: $\nu_1 + \nu_2$ = 50+110=160 αυτοκίνητα

Οπότε Ν(Α) = 160, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{160}{400} = \dfrac{2}{5}$.

Τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες έχουν : $\nu_4 + \nu_5 = 30+90=120$ αυτοκίνητα.
Οπότε N(B)=120, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι :

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$$

Γ. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από το σύνολο των επιβαινόντων, δηλ. $N(\Omega) = \sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = 1200$

Τρεις συνεπιβάτες έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο με 4 επιβαίνοντες, δηλ. $x_4 \cdot \nu_4 = 120$ άτομα. Οπότε N(Γ)=120, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{120}{1200} = \frac{1}{10}$$

Κανέναν συνεπιβάτη δεν έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο μόνος του, δηλ. $x_1 \cdot \nu_1 = 50$ άτομα. Οπότε N(Δ)=50, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ 4^ο^

Α.

i) Έστω $\bar{x}$ η μέση ηλικία των κατοίκων και s η τυπική απόκλιση. Τότε, μετά από 25 χρόνια, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, η μέση τιμή θα 'ναι $\bar{x}+25$ ενώ η τυπική απόκλιση δεν θα μεταβληθεί. Αφού το δείγμα γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 25 χρόνια, τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι 10%.

Οπότε : $\dfrac{s}{\bar{x}+25} = \dfrac{1}{10}$ (1)

Επίσης, αφού CV είναι τώρα 20%, είναι: $\dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$ (2)

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{s}{\bar{x}+25} = \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right| \begin{array}{r} 10s = \bar{x}+25 \\ \bar{x} = 5s \end{array}\left| \begin{array}{r} 10s = 5s+25 \\ \bar{x} = 5s \end{array}\right| \begin{array}{r} 5s = 25 \\ \bar{x} = 5s \end{array}\left| \begin{array}{r} s = 5 \\ \bar{x} = 25 \end{array}\right|$$

ii) Η μέση τιμή των $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_\nu^2$ είναι: $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$

Είναι : $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right]$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i}{v}\right)^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - \overline{x}^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - 625$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} = 650$$

iii) Στην κανονική κατανομή για το εύρος του δείγματος ισχύει $R \approx 6s$. Αφού λοιπόν η μικρότερη τιμή x_{min} είναι 10, για τη μεγαλύτερη τιμή x_{max} θα ισχύει η προσέγγιση : $x_{max} \approx 10 + 6s$ δηλ. $x_{max} \approx 40$

Β.

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους ανθρώπους που υπάρχουν στο χωριό. Έστω τα ενδεχόμενα:

Α:" ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο Α"

Β:" ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο Β"

Αφού το 30% των κατοίκων πηγαίνουν στο Α, είναι :P(A)=0,3

Αφού το 60% των κατοίκων δεν πηγαίνουν στο Β, είναι $P(B') = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

Αφού το 50% των κατοίκων πηγαίνει σ' ένα τουλάχιστον απ' τα δύο καφενεία, είναι $P(A \cup B) = 0{,}5$

i) $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει και στα δύο καφενεία. Έχουμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}3 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$

οπότε και στα δύο καφενεία πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

ii) Α – Β είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο Α και

Β – Α είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο Β.

Έχουμε: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$ δηλαδή μόνο στο Α πηγαίνει το 10% των κατοίκων

Ομοίως: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$ δηλαδή μόνο στο Β πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

Οπότε περισσότεροι είναι οι κάτοικοι που πηγαίνουν μόνο στο Β από εκείνους που πηγαίνουν μόνο στο Α.

Γ. Αφού η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος, οι περιττοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους στο δείγμα 1,…,ν άρα ν περιττός. Δηλαδή υπάρχει ένας περιττός περισσότερο. Έτσι, το πλήθος των περιττών είναι $\frac{\nu+1}{2}$ ενώ των άρτιων $\frac{\nu-1}{2}$.

Έστω τα ενδεχόμενα:
Π: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι περιττός”
Α: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι άρτιος”

Τότε: $P(\Pi)=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{\nu+1}{2}}{\nu}=\frac{\nu+1}{2\nu}$

Και : $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{\nu-1}{2}}{\nu}=\frac{\nu-1}{2\nu}$

Αφού η P(Π) είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από την P(A), έχουμε:

$$P(\Pi)=P(A)+\frac{0{,}8}{100}$$

$$\frac{\nu+1}{2\nu}=\frac{\nu-1}{2\nu}+0{,}008$$

$$\nu+1=\nu-1+0{,}016\nu$$

$$2=0{,}016\nu$$

$$\nu=\frac{2}{0{,}016}=\frac{2000}{16}=125$$

άρα στο χωριό υπάρχουν 125 άτομα