Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1

Α. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 11

β) Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος.**

α) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι <<1 – 1>> όταν για κάθε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x)\neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ, τότε $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x)dx=0$ και $a<\beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z\neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left|\frac{w-i}{w+i}\right|=|z|$

Μονάδες 5

β) Αν $|z|=1$ και Μ η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον άξονα x΄x.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow$ z φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a,\beta]$ με $f(a)>1$ και έστω $z=f(a)\cdot i$ και $w=f(\beta)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β).

Μονάδες 7

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ax-1$ όπου $a>1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,f(0))$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 8

γ) Έστω $\mathrm{E}(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $(0,f(0))$ και την ευθεία $x=a>1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}(a)=e^a-\frac{a^2}{2}-a-1$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το $\lim_{a\to+\infty}\mathrm{E}(a)$.

Μονάδες 6

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και έστω

$$g(x)=\int_0^1 t\cdot f(xt)\,dt,\quad t,x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^x t\cdot f(t)dt$ για κάθε $x\neq 0$.

Μονάδες 6

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

γ) $x\cdot g(x)<\int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

δ) Αν $\int_1^2 t\cdot f(t)dt=3\int_0^1 t\cdot f(t)\,dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιος ώστε: $2g(\xi)=f(\xi)$.

Μονάδες 6