Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 83

Β. Θεωρία από σχολικό βιβλίο στη σελίδα 41

Γ. 1 $\to$ Σωστό 2 $\to$ Σωστό 3 $\to$ Λάθος
4 $\to$ Λάθος 5 $\to$ Λάθος.

ΘΕΜΑ 2°

i) Έστω ότι η (1) δεν παριστάνει ευθεία, τότε θα υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $\begin{cases} 2\alpha+1=0 \\ \alpha-1=0 \end{cases}$

Άτοπο, διότι το σύστημα είναι αδύνατο.
Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ, επαληθεύουν την (1).
Πράγματι (2α+1)(-1)+(α-1)2+3=-2α-1+2α-2+3=0,
άρα οι ευθείες της μορφής (1), διέρχονται από το Μ(-1,2).

iii) Για α = 0, προκύπτει η ευθεία με εξίσωση x-y+3 = 0.

Το σύστημα $\begin{cases} x+5y-3=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ έχει λύση $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$, άρα Α(-2,1).

Για α = -1, προκύπτει η ευθεία με εξίσωση -x-2y+3 = 0.

Το σύστημα $\begin{cases} x+5y-3=0 \\ -x-2y+3=0 \end{cases}$ έχει λύση $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$, άρα Β(3,0).

$\overrightarrow{AB}=(5,-1)$ και $\overrightarrow{AM}=(1,1)$, άρα

$$(AMB)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix}\right\|=3 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

i) Για λ=1 η (1) γίνεται: C_1: $y^2 = 6x$, εξίσωση παραβολής με p=3, διευθετούσα δ: $x = -\frac{3}{2}$ και εστία $E(\frac{3}{2}, 0)$.

ii) Για λ=2 η (1) γίνεται: C_2: $x^2 + y^2 = 16$, εξίσωση κύκλου με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα R=4.

iii) Η έλλειψη έχει τις εστίες της στον άξονα των x, και αφού η μία είναι Ε(3/2,0) είναι γ=3/2. Ακόμη 2α=4 άρα α=2. Επομένως: $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=7/4$. Άρα η ζητούμενη έλλειψη έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$$

Η εκκεντρότητα ε είναι: ε=γ/α=3/4.

iv) Λύνουμε το σύστημα των C_1,C_2. Με απαλοιφή του y προκύπτει η εξίσωση: $x^2+6x-16=0$ η οποία έχει λύσεις x=2 & x=-8 που απορρίπτεται γιατί η παραβολή έχει ρ=3>0. Επομένως: $y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$. Άρα τα σημεία τομής είναι: $P_1\left(2,2\sqrt{3}\right)$ και $P_2\left(2,-2\sqrt{3}\right)$.

Από τον ορισμό της παραβολής $d(P_1,\delta) = (P_1,E)$ και $d(P_2,\delta) = (P_2,E)$ αφού τα P_1.P_2 είναι σημεία της παραβολής. Επομένως ισχύει ότι: $d(P_1,\delta)-(P_1E)= d(P_2,\delta)-(P_2E)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α α. Αν $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε φ = 0, άτοπο αφού φ=π/3.

β. $A = -2|\vec{\alpha}|, B = -|\vec{\beta}|, \Gamma = \vec{\alpha}\vec{\beta}$.

Η (1) παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Πράγματι: $A^2+B^2-4\Gamma= 4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = \left|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 > 0$

αφού το $\left|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 0$ δίνει $2\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ και απορρίπτεται.

Άρα $\rho = \frac{\sqrt{|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2}}{2} = \frac{1}{2}|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

Β. α. Είναι $K\left(|\vec{\alpha}|, \frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) = (1, 1)$, άρα $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$

Επομένως $\rho^2 = \dfrac{4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\text{συν}\varphi}{4} = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$

β. $d(K, \varepsilon) = \dfrac{|3+4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 = \rho$. Άρα ο κύκλος με εξίσωση την (1) εφάπτεται στην ευθεία: $3x+4y-12=0$.

γ.

Αν $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$, τότε υπάρχει λ, ώστε $\vec{V} = \lambda\vec{\alpha}$, αφού $\vec{V} \,//\, \vec{\alpha}$.

Ακόμα:

$\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\vec{V} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Άρα $\vec{V} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{\alpha}$.