<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 251 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σελ. 273 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σελ. 150 σχολικού βιβλίου.

Α4. α) → Λ, β) → Σ, γ) → Σ, δ) → Σ, ε) → Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν θέσουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, θα είναι $\overline{z} = x - yi$
και η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow \left[2\left(x^2+y^2\right)-4\right]+\left(2x-2\right)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2+y^2\right)-2\right]+\left(x-1\right)i=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2=0 \quad \text{και} \quad x-1=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2=2 \quad \text{και} \quad x=1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2=1 \quad \text{και} \quad x=1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\pm 1 \quad \text{και} \quad x=1.$$

Άρα οι λύσεις είναι $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$.

Β2. Είναι

$$w=3\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\cdot\left[\frac{\left(1+i\right)\cdot(1-i)}{2}\right]^{39}=3\cdot\left[\frac{1+2i-1}{2}\right]^{39}=$$

$$=3\cdot(i)^{39}=3i^{38}\cdot i=3\cdot\left(i^2\right)^{19}\cdot i=$$

$$=3\cdot(-1)\cdot i=-3i.$$

Β3. Η σχέση $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γράφεται:
$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5$.
Αν $u = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $|x + yi - 3i| = 5 \Leftrightarrow$
$|x + yi - 3i|^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 5^2$.
Επομένως ο γ.τ. των μιγαδικών u είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $h'(x)=1-\dfrac{(e^x+1)'}{e^x+1}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα h είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επίσης, είναι $h''(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα η h είναι κοίλη στο R.

Γ2. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln\left[e^{h(2h'(x))}\right]<\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)\quad (1)$$

Επειδή $h(1)=1-\ln(e+1)=\ln e-\ln(e+1)=\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)$ η (1) γράφεται $\ln\left[e^{h(2h'(x))}\right]<h(1)\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<h(1)$.

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ισοδύναμα ότι $2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)$ (2).

Επειδή η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και $h'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι από τη (2) προκύπτει ισοδύναμα $x>0$.

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln(e^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)\overset{*}{=}\ln 1=0$$

*Διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)=\lim\limits_{y\to0}\ln\left(1-y\right)=\ln 1=0$ $\left(\text{όπου έχουμε θέσει } y=\dfrac{1}{e^x+1}\right)$.

Άρα η οριζόντια ασύμπτωση στο $+\infty$ είναι η y= 0.

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{x}\ln(e^x+1)\right]=1-0=1.$$

Διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\ln 1=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\ln(e^x+1)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(e^x+1)\right]=-\ln 1=0$.

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$ είναι η $y=x$.

Γ4. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της φ.

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αρκεί να μελετήσουμε την $g(x)=h(x)+\ln 2=h(x)-h(0)$.

Όμως, $g'(x)=h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $g(0)=h(0)-h(0)=0$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα x = 0 θα είναι μοναδική για την g.

Για x ≥ 0 θα είναι $g(x)\ge g(0)\Leftrightarrow g(x)\ge 0$.

Επομένως $\varphi(x)=e^x\cdot g(x)\ge 0$ για κάθε x ∈ [0, 1].

Άρα $E=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1\left[e^x h(x)+e^x\ln 2\right]dx=\int_0^1\left[\left(e^x\right)'\cdot h(x)\right]dx+\ln 2\int_0^1 e^x dx=$

$$=\left[e^x h(x)\right]_0^1-\int_0^1 e^x h'(x)+\ln 2\cdot\left[e^x\right]_0^1=e\cdot h(1)-h(0)-\int_0^1 e^x\frac{1}{e^x+1}dx+\ln 2(e-1)=$$

$$=e\left(1-\ln\left(e+1\right)\right)+\ln 2-\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx+\left(e-1\right)\ln 2=$$

$$=e-e\ln\left(e+1\right)+\ln 2-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1+\left(e-1\right)\ln 2=$$

$$=e-e\ln\left(e+1\right)+e\ln 2-\left[\ln\left(e+1\right)-\ln 2\right]=e-e\ln\left(e+1\right)+e\ln 2-\ln\left(e+1\right)+\ln 2=$$

$$=e-\ln\left(e+1\right)\cdot\left(e+1\right)+\ln 2\cdot\left(e+1\right)=$$

$$=e-\left(e+1\right)\left[\ln\left(e+1\right)-\ln 2\right]=e+\left(e+1\right)\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f θα είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ αρκεί να ισχύει $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$.

Όμως $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}e^x\overset{**}{=}e^0=1$.

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).

** (Διότι e^x συνεχής).

- Για $x\ne 0$ $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{(e^x-1)'x-(e^x-1)(x)'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{*}{=}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).

Θέτουμε $g(x)=xe^x-e^x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=xe^x$.

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$.

Επίσης $g'(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$

$g'(x)<0\Leftrightarrow xe^x<0\Leftrightarrow x<0$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών για την g:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
g'	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\nearrow$

ολικό
ελάχιστο =0

Συμπεραίνουμε ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (έχει αποδειχθεί) αλλά και σε όλο το $\mathbb{R}^*$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \int_1^x f(u)du,\ x \in \mathbb{R}$.

Είναι $K'(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Με $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

Με $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 1 > 0$.

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισοδύναμα

$K'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η K είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0 \Leftrightarrow K(2f'(x)) = K(1)$.

Επειδή K γν. αύξουσα θα είναι και 1-1.

Οπότε $2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$.

Όμως η f' είναι γν. αύξουσα διότι η f είναι κυρτή.
Άρα f' είναι 1-1 και έτσι προκύπτει $x = 0$.

β) Στο σημείο στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης y(t) ισχύει:

$$x'(t) = 2 \cdot \left[f\left(x(t)\right) \right]' \Leftrightarrow x'(t) = 2 \cdot f'\left(x(t)\right) \cdot x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow} f'\left(x(t)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(x(t)\right) = f'(0).$$

Όμως f' γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε x(t)= 0. Έτσι το ζητούμενο σημείο είναι M(0, f(0)) ή M(0, 1).

Δ3. Η συνάρτηση g για $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x},\ x>0$ γράφεται

$$g(x)=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$g'(x) = 2(e^x - e)\cdot e^x\cdot(x-2)^2 + (e^x-e)^2\cdot 2\cdot(x-2) =$

$= 2\cdot(e^x - e)\cdot(x-2)\cdot[e^x\cdot(x-2) + e^x - e] =$

$= 2\cdot(e^x - e)\cdot(x-2)\cdot(e^x\cdot x - 2e^x + e^x - e] =$

$= 2\cdot(e^x - e)\cdot(x-2)\cdot(xe^x - e^x - e)$.

- Θέτουμε $h(x)=x\cdot e^x-e^x-e,\ x\in(0,\infty)$. Η h είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
  Είναι $h'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Εξάλλου είναι $h(1)=-e<0,\ h(2)=e\cdot(e-1)>0$.
  Η h είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ και επειδή $h(1)\cdot h(2)<0$, προκύπτει από το Θ. Boltzano ότι υπάρχει $x_0\in(1,\ 2)$ ώστε $h(x_0)=0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(1,\ 2)$. Έτσι, με $x>x_0\Rightarrow h(x)>h(x_0)\Rightarrow h(x)>0$.
  με $x<x_0\Rightarrow h(x)<h(x_0)\Rightarrow h(x)<0$.

- $e^x-e=0\Leftrightarrow e^x=e^1\Leftrightarrow x=1$.
  $e^x-e>0\Leftrightarrow e^x>e^1\Leftrightarrow x>1$.
  $e^x-e<0\Leftrightarrow e^x<e^1\Leftrightarrow x<1$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
e^x-e		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$h(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
g'		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
g		↘		↗		↘		↗	
			τ.ε.		τ.μ.		τ.ε.		

Προκύπτει ότι η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μια θέση τοπικού μεγίστου.