



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Δώστε τους ορισμούς:

I. Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

II. Παραβολή με διευθετούσα την ευθεία δ και εστία το σημείο E εκτός της δ .

β. Γράψτε τον τύπο της απόστασης του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία

$$\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$$

(3x2 μονάδες)

γ. Αποδείξτε ότι η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(9 μονάδες)

δ. Σημειώστε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** για τις προτάσεις:

I. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-A, -B)$.

II. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ έχει πάντοτε κέντρο $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$.

III. Η απόσταση της εστίας E της παραβολής $x^2 = 2py$, από την διευθετούσα ευθεία δ είναι ίση με $|p|$.

IV. Αν E, E' σταθερά σημεία και για το μεταβλητό σημείο M ισχύει $(ME) + (ME') = 2\alpha$, $\alpha > 0$ τότε το M κινείται σε έλλειψη με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$

V. Αν για τα μη παράλληλα στους άξονες $x'x$ και $y'y$ διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους είναι αντίστροφοι αριθμοί.

(5x2 μονάδες)

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\vec{\gamma}+3\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta}$.

- α. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=4$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -12$.
(8 μονάδες)
- β. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{5}$.
(5 μονάδες)
- γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε την τιμή του λ .
(6 μονάδες)
- δ. Για $\lambda=4$ να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι οξεία.
(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2), η εξίσωση του ύψους ΒΔ: $x-4y-5=0$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ: $3x+2y+3=0$.

- α. Βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.
(6 μονάδες)
- β. Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΒ και της κορυφής Β.
(7 μονάδες)
- γ. Αν Ε το σημείο τομής των ΓΜ και ΒΔ τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ.
(6 μονάδες)
- δ. Δίνεται η γραμμή (C) με εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 8)y + 3 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή του λ , ώστε ο κύκλος (1) να έχει διάμετρο την πλευρά ΒΓ.
(6 μονάδες)

Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x(y + 4) + 12 + 8y = 0$ (1).

- α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) οι οποίες είναι παράλληλες.
(7 μονάδες)
- β. Αν (ϵ_1): $x+y+2=0$ και (ϵ_2): $x+y+6=0$ είναι οι δύο ευθείες που παριστάνει η (1), να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που εφάπτεται στις ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία (ϵ): $y=3x$.
(7 μονάδες)
- γ. Βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση του σημείου τομής των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ) από τον κύκλο C.
(6 μονάδες)
- δ. Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (C_1) με εστίες στον άξονα $x'x$, που έχει ασύμπτωτη την (ϵ): $y=3x$ και εστιακή απόσταση $2\gamma=10\rho^2$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου C.
(5 μονάδες)

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίωσής τους.

Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.