



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Έστω η πολυωνμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

(8 Μόρια)

A.2. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να γράψετε τα αναπτύγματα των τύπων $\log_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)$ και $\log_\alpha (\theta_1 \theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(2 Μόρια)

A.3. Τι γνωρίζετε για την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$.

(3 Μόρια)

A.4. Να γράψετε στο τετράδιό σας για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1453}{2011} \eta\mu(2x)$ έχει περίοδο :

A: $T = \pi + \frac{\pi}{4}$

B: $T = \pi$

Γ: $T = -2\pi$

Δ: $T = \frac{\pi}{2}$

E: $T = \frac{1453}{2011}$

(2 Μόρια)

β. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου

$$P(x) = (x^4 - 3x^2 + 2x)^{15} - x^5 + 4x \text{ είναι :}$$

A: $2^{15} + 4$

B: 1

Γ: 3

Δ: 5

E. κανένα από τα προηγούμενα.

(2 Μόρια)

- γ. Αν S_n συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1 , τότε είναι :

$$\text{A: } S_n = \alpha_1 \frac{\lambda - 1}{\lambda^n - 1}$$

$$\text{B: } S_n = \alpha_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

$$\text{Γ: } S_n = \frac{\alpha_1 \lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

$$\text{Δ: } S_n = \alpha_1 \frac{1 - \lambda^n}{\lambda - 1}$$

Ε: κανένα από τα προηγούμενα

(2 Μόρια)

- A.5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

(2 Μόρια)

- β. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \epsilon \phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2}{\pi}$.

(2 Μόρια)

- γ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha^x \beta^x$ όπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , όταν $\alpha < \frac{1}{\beta}$.

(2 Μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\beta x}{2}\right) + 1$, όπου $\beta < 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, \beta + 5)$, και $B\left(\frac{4\pi}{\beta}, 4\beta^2\right)$ τότε:

- B.1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

(7 Μόρια)

- B.2.** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=4$ στο διάστημα $[0, 12\pi]$.

(7 Μόρια)

- B.3.** Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

(6 Μόρια)

B.4. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A = f(4\pi) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και

$$B = 3f(0) \frac{f(0)^{2010} - 1}{f(0) - 1} + 4$$

(5 Μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 2$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του $P(x)$ δια $x - 1$ δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για $x = -2$ είναι 10, τότε:

Γ.1. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$.

(7 Μόρια)

Γ.2. Για τις τιμές $a = -5$ και $b = 10$,

α. Να βρείτε το πηλίκο $\Pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$ και να γράψετε το $P(x)$ με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης

(6 Μόρια)

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = u(x)$, όπου $u(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια $Q(x)$.

(7 Μόρια)

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $Q(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(5 Μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$.

Δ.1. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(5 Μόρια)

Δ.2. Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης

$$A = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

(6 Μόρια)

Δ.3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f(-x) < -2 \ln 3$.

(7 Μόρια)

Δ.4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)} + 3 = 4e^{f(x)}$.

(7 Μόρια)