



## ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1

- A. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
- B. Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.
- Γ. Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.
- Δ. 1. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:  

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad \text{με } \alpha = \operatorname{Re}(z).$$
2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με  $a = e$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:  

$$\{x/x \in A \text{ και } x \in B, \quad \text{με } g(x) \neq 0\}$$
4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.
5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

## ΘΕΜΑ 2

- α. i. Η  $f$ , ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$

$$f''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο  $x_0 = -1$  παρουσιάζει καμπή, είναι  $f''(-1) = 0$ :

$$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

- ii. Επειδή  $\lambda = 1$  είναι  $f(x) = 4x^3 + 12x^2$  και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, -1]$  και κυρτή στο  $[-1, +\infty)$ .

β. Θέτουμε  $u = f(x)$ . Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

με  $c$  σταθερά, γιατί για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^3 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο  $(0, 1)$  ανήκει στην γραφική παράσταση της  $F$ , οπότε  $F(0) = 1$ :

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν  $E$  ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^0 |f(x)| dx$$

Στο διάστημα  $[-3, 0]$  είναι  $f(x) = 4x^2(x + 3) \geq 0$ , άρα

$$E = \int_{-3}^0 f(x) dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27 \text{ τ.μ}$$

### ΘΕΜΑ 3

α. i) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση  $x = \frac{\pi}{4}$  και παίρνουμε:

$$f(\eta\mu \frac{\pi}{4}) + f(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με  $x = 0$  παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$g(x) = f(x) + x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η  $g$  είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων της  $f$ , και της  $x - 1$ .
- Είναι  $g(0) = f(0) - 1$  και  $g(1) = f(1) - 1$ , οπότε
 
$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**1<sup>η</sup> περίπτωση:**

Αν  $f(0) = 1$ , τότε από (1)  $\Leftrightarrow g(0) = 0$  ή  $g(1) = 0$ . Η  $g$  θα έχει ρίζα το  $x_0 = 0$  ή το  $x_0 = 1$

**2<sup>η</sup> περίπτωση:**

Αν  $f(0) \neq 1$ , τότε από την (1) είναι:  $g(0) \cdot g(1) < 0$ . Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την  $g$  στο  $[0, 1]$ , έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$ , τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$

το οποίο αποδειξε το ζητούμενο.

- β. i. Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως άθροισμα της  $f$ , η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολυωνυμικής  $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ , με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$

- Η  $h$  έχει ελάχιστο στο  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Πραγματικά, είναι

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Ακόμα, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Το  $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της  $h$ .

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο  $h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ :

$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  είναι

$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 - f(0)$$

και

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \Leftrightarrow f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 - f(\eta\mu x).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - f(0)) - (1 - f(\eta\mu x))}{\eta\mu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} \quad (2) \end{aligned}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση  $y = \eta\mu x$ . Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x) = \eta\mu 0 = 0$$

το  $y$  τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \quad (3)$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της  $f'(0)$  είναι

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0) \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την  $f'(0)$ .

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης  $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1$  και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x)]' &= (1)' \Leftrightarrow [f(\eta\mu x)]' + [f(\sigma\upsilon\nu x)]' = 0 \\ &\Leftrightarrow (\eta\mu x)' f'(\eta\mu x) + (\sigma\upsilon\nu x)' f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \end{aligned}$$

Από εδώ, για  $x = 0$  έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x} = f'(0) = 0$$

#### ΘΕΜΑ 4

A. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$  και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η  $g$ , ως συνεχής στο  $x_0 = 0$ :

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ ,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το  $g(0) = 0$ , οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν  $x=0$ , αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η  $x = 0$ .

- B. α. i.** Θέτουμε  $u = x - xt$ , οπότε  $du = -xdt$ . Για  $t = 0$  είναι  $u = x$  και για  $t = 1$  είναι  $u = 0$ . Τότε:

$$x \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_x^0 e^{f(u)} (-du) = \int_0^x e^{f(u)} du = \int_0^x e^{f(t)} dt.$$

Τότε για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt$$

οπότε

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Στην συνέχεια

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt \Leftrightarrow z = (1+i) \int_0^x e^{f(t)} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Επειδή  $e^{f(t)} > 0$ , για κάθε  $x \geq 0$  είναι  $\int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$ , επομένως

$$\frac{z}{1+i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

- ii.** Βρίσκουμε  $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$ , οπότε

$$\left| \frac{z}{1+i} \right| = \left| \int_0^x e^{f(t)} dt \right| = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)} dt = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(x) - 1 \quad (1), \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η  $f$  και η  $e^t$  είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση  $e^{f(t)}$  και
- το άθροισμα  $f(t) + e^t$ ,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \int_0^x [f(t) + e^t] dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left( \int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = e^{f(x)}, \quad \left( \int_0^x [f(t) + e^t] dt \right)' = f(x) + e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left( \int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = \left( \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(x) - 1 \right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x) + e^x, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε  $x_1, x_2 \geq 0$  από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1) + e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$

$$e^{f(x_2)} = f(x_2) + e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω  $x_1 < x_2$ . Επειδή η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

με  $g$  την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ , στο οποίο παίρνει τιμές η  $f$ . Επομένως

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε  $x_1, x_2 \geq 0$ ,

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει, ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η  $f$  ως γνησίως αύξουσα, είναι 1-1, άρα έχει αντίστροφη.

Πάλι η  $f$  ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[ f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

- Η σχέση  $e^{f(x)} = f(x) + e^x$  επειδή  $f(x) \geq 0$  δίνει  $e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Για  $x = 0$  πάλι από την  $e^{f(x)} = f(x) + e^x$  παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0) + 1.$$

Έτσι, το  $f(0)$  είναι λύση της εξίσωσης  $e^x = x + 1$ . Από το ερώτημα Α, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση  $x = 0$ , που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{f(0) = 0} \quad (2)$$

Επομένως η  $f$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[ f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Έστω  $y = f(x)$  με  $x \geq 0$ . Από την  $e^{f(x)} = f(x) + e^x$  έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς  $x \geq 0$ , αφού  $e^y - y \geq 1$ .

Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του  $x$  είναι  $f(x) = y$ . Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y - y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y - y)} = e^y - y$$

Η  $g$  ως γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  είναι 1-1, έτσι  $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in [0, +\infty)$$

δ. Για  $x = 0$  από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)} dt = \int_0^0 [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(a) = 1} \quad (3)$$

Για την συνάρτηση  $f$  εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα  $[0, a]$ ,  $a > 0$ , γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο  $(0, +\infty)$ . Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον,  $\xi \in (0, a)$  με

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1 - 0}{a} = f'(\xi) \quad \text{ή} \quad a f'(\xi) = 1.$$