

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία. Σελίδα 43 του σχολικού βιβλίου.

**A2.** Θεωρία Σελίδα 58 του σχολικού βιβλίου.

**A3.** Θεωρία. Σελίδα 83 του σχολικού βιβλίου.

- A4.** α. Σωστό  
β. Λάθος  
γ. Λάθος  
δ. Σωστό  
ε. Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$2\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1.$$

**B2.** Έστω  $\hat{\varphi} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ , τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \stackrel{(B1)}{\Leftrightarrow} \cos \hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \cos \hat{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\varphi} = 45^\circ.$$

**B3.**  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 = 5 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$

$$|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot 3\vec{\beta} + (3\vec{\beta})^2 = 4(\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 5$$

$$\Rightarrow |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{5}$$

Οπότε  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|.$

**Δεύτερος τρόπος.**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| \quad \text{ή} \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2$$

$$\text{ή} \quad 3\vec{\alpha}^2 - 14\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 8\vec{\beta}^2 = 0 \quad \text{ή} \quad 3 \cdot 2 - 14 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 0, \text{ ισχύει.}$$

**B4.** Έστω  $\vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ , τότε γνωρίζουμε ότι  $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha}$  δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\mu$  ώστε να ισχύει  $\vec{\gamma} = \mu \cdot \vec{\alpha}$  (1).

Σύμφωνα με τον τύπο  $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$  έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\mu \cdot \vec{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \mu |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \mu = \frac{\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow \mu = \frac{2|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}.$$

Τελικά από τη σχέση (1) προκύπτει:  $\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha}$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τις κορυφές Β, Γ του τριγώνου είναι:  $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\text{Β}}}{x_{\Gamma} - x_{\text{Β}}} = \frac{1 - 4}{2 - 4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ .

Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\text{ΒΓ}} (x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2} (x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2} x - \frac{3}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3}{2} x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} x - 2 \Leftrightarrow 2y = 3x - 4 \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0.$$

Το ύψος ΓΔ του τριγώνου είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ οπότε θα ισχύει:

$$\Gamma\Delta \perp \text{ΑΒ} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{\text{ΑΒ}} = -1 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lambda_{\text{ΑΒ}} = \frac{y_{\text{Β}} - y_{\text{Α}}}{x_{\text{Β}} - x_{\text{Α}}} = \frac{4 - (-1)}{4 - 5} = \frac{4 + 1}{-1} = -5$$

$$\text{Από (1)} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{5}.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**Ε 3.Μλ2ΘΤ(α)**

Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\Gamma\Delta} (x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5y = x + 3 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

**Γ2.** Για τις ευθείες που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**1<sup>η</sup> περίπτωση:** Εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία  $\varepsilon_1 : x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$  είναι λύση, δηλαδή αν  $d(O, \varepsilon_1) = 2$ .

$$\text{Έχουμε: } d(O, \varepsilon_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα η κατακόρυφη ευθεία  $\varepsilon_1 : x = 2$  αποτελεί λύση.

**2<sup>η</sup> περίπτωση:** Εξετάζουμε αν υπάρχουν ευθείες της μορφής:  $\varepsilon : y - y_{\Gamma} = \lambda(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$  που να αποτελούν επίσης λύση.

Πρέπει και αρκεί:

$$d(O, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |1 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad |1 - 2\lambda| \geq 0, 2\sqrt{\lambda^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow |1 - 2\lambda|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 4(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

Άρα η ευθεία

$$\varepsilon : -\frac{3}{4}x - y + 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x - y + 1 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x - 4y + 10 = 0$$

αποτελεί επίσης λύση.

**Γ3. i)** Αφού η παραβολή C έχει κορυφή το  $O(0, 0)$  και άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ , θα έχει εξίσωση της μορφής  $C : x^2 = 2py$ .

$$\Gamma(2, 1) \in C \Leftrightarrow x_{\Gamma}^2 = 2py_{\Gamma} \Leftrightarrow 2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι  $C : x^2 = 2 \cdot 2y \Leftrightarrow x^2 = 4y$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**Ε 3.Μλ2ΘΤ(α)**

- ii) Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της  $C$  που είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .  
 Αν  $M(x_1, y_1)$  το σημείο επαφής της  $\varepsilon$  με την  $C$  θα είναι

$$\varepsilon : xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow$$

$$xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1 \quad (2)$$

$$\text{Αφού } \varepsilon \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3.$$

$$\text{Όμως το } M(x_1, y_1) \in C \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 3^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 4y_1 = 9 \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{4}.$$

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 4 \cdot \frac{3}{2}x - 4 \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 6x - 9 \Leftrightarrow 6x - 4y - 9 = 0.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1.  $C_1 : 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$

Έχουμε:  $\alpha^2 = 4$ ,  $\beta^2 = 3$  και επειδή  $4 > 3$  οι εστίες της  $C_1$  βρίσκονται στον  $x'$ αξ.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

$E'(-1,0)$ ,  $E(1,0)$  και  $B(0, \sqrt{3})$  ή  $B(0, -\sqrt{3})$ .

$$(BE') = \sqrt{(x_{E'} - x_B)^2 + (y_{E'} - y_B)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(BE) = \sqrt{(1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(E'E) = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

Το τρίγωνο  $BE'E$  είναι ισόπλευρο.

**Δεύτερος τρόπος**

$BO$  (ή  $B'O$ ) ύψος και διάμεσος του τριγώνου  $BE'E$  (ή  $B'E'E$ ), άρα  $BE = BE'$ .

$$\text{Το } B \text{ είναι σημείο της έλλειψης } (BE) + (BE') = 2a \xrightarrow[\text{BE=BE'}]{\alpha=2} (BE) = (BE') = 2.$$

Επίσης  $(E'E) = 2$ , επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς 2.

- Δ2. Αν αντικαταστήσουμε  $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  στις εξισώσεις των δύο κωνικών, παρατηρούμε ότι επαληθεύονται.

$$\text{Πράγματι: } 3(\sqrt{2})^2 + 4\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ και } (\sqrt{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**Ε 3.Μλ2ΘΤ(α)**

άρα το σημείο  $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  είναι κοινό των  $C_1, C_2$ .

Το σύστημα των εξισώσεων των  $C_1, C_2$  μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα με αγνώστους  $x^2, y^2$ . Δεδομένου ότι έχει τη λύση  $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  οι υπόλοιπες

λύσεις θα είναι:  $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ , που είναι και οι συντεταγμένες των υπολοίπων κοινών σημείων.

**Δεύτερος τρόπος.**

Τα σημεία τομής των κωνικών προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ 4x^2 + 4y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} & x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{3}{2}} & y = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{3}{2}} & y = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{3}{2}} & y = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

**Τρίτος τρόπος**

Αφού παρατηρήσουμε ότι  $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  είναι κοινό σημείο των  $C_1, C_2$  και γνωρίζοντας ότι οι κωνικές έχουν άξονες συμμετρίας  $x'x$ ,  $y'y$  και κέντρο συμμετρίας το  $O$ , συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα κοινά σημεία είναι:  $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ .

**Δ3.**  $2(OM)^2 = 7 \Leftrightarrow (OM) = \sqrt{\frac{7}{2}}$ , άρα το  $M$  θα είναι σημείο του κύκλου  $C_2$ .

$(ME) + (ME') = 4 \Leftrightarrow (ME) + (ME') = 2a$ , άρα το  $M$  είναι σημείο της έλλειψης  $C_1$ . Το  $M$  είναι κοινό σημείο των  $C_1, C_2$ , επομένως από το Δ2,

$M(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $M(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $M(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  ή  $M(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ .

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_1$ , έστω  $\varepsilon_p$ , στο  $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  είναι:

$$\varepsilon_p : \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1 \Leftrightarrow 3xx_1 + 4yy_1 = 12 \Leftrightarrow 3x\sqrt{2} + 4y\sqrt{\frac{3}{2}} = 12.$$

$$\text{Η } \varepsilon_p \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσεως } \lambda = -\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{EP\bar{E}}$ , έστω  $\delta$ , είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη  $\varepsilon_p$  στο σημείο  $P$ , επομένως αν  $\lambda'$  είναι ο συντελεστής διεύθυνσεως της  $\delta$ , τότε:

$$\lambda \cdot \lambda' = -1 \Leftrightarrow \lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Η ευθεία  $\delta$  διέρχεται από το  $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσεως

$$\lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ άρα, } \delta : y - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{2}).$$