



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

- A.** Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
- B.** Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.
- Γ.** Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.
- Δ.**
1. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad \text{με } \alpha \equiv \operatorname{Re}(z).$$
 2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με $a = e$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:

$$\{x/x \in A \text{ και } x \in B, \quad \text{με } g(x) \neq 0\}$$
 4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.
 5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ 2

- α. i.** Η f , ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$

$$f''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f''(-1) = 0$:

$$f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

- ii.** Επειδή $\lambda = 1$ είναι $f(x) = 4x^3 + 12x^2$ και

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$.

β. Θέτουμε $u = f(x)$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. i. Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

με c σταθερά, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^3 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της F , οπότε $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3$$

Το ζητούμενο εμβαδόν E ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^0 |f(x)| dx$$

Στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(x) = 4x^2(x + 3) \geq 0$, άρα

$$E = \int_{-3}^0 f(x) dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27 \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 3

α. i) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = \frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε:

$$f(\eta\mu \frac{\pi}{4}) + f(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με $x = 0$ παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) + x - 1, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η g είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων της f , και της $x - 1$.
- Είναι $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) \stackrel{(αι)}{=} 1 - f(0)$, οπότε

$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση:

Αν $f(0) = 1$, τότε από (1) $\Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$. Η g θα έχει ρίζα το $x_0 = 0$ ή το $x_0 = 1$

2^η περίπτωση:

Αν $f(0) \neq 1$, τότε από την (1) είναι: $g(0) \cdot g(1) < 0$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την g στο $[0, 1]$, έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

- β. i.** Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως άθροισμα της f , η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολυωνυμικής $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$

- Η h έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Πραγματικά, είναι

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Το $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h .

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο $h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$:

$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 - f(0)$$

και

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 \Leftrightarrow f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 - f(\eta\mu x).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - f(0)) - (1 - f(\eta\mu x))}{\eta\mu x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} \quad (2) \end{aligned}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $y = \eta\mu x$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x) = \eta\mu 0 = 0$$

το y τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \quad (3)$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της $f'(0)$ είναι

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(0) \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $f'(0)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης $f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} [f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x)]' &= (1)' \Leftrightarrow [f(\eta\mu x)]' + [f(\sigma\upsilon\nu x)]' = 0 \\ &\Leftrightarrow (\eta\mu x)' f'(\eta\mu x) + (\sigma\upsilon\nu x)' f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = 0 \end{aligned}$$

Από εδώ, για $x = 0$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(\eta\mu 0) - \eta\mu 0 \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(0)}{\eta\mu x} = f'(0) = 0$$

ΘΕΜΑ 4

A. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η g , ως συνεχής στο $x_0 = 0$:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$, οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν $x=0$, αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η $x = 0$.

- B. α. i.** Θέτουμε $u = x - xt$, οπότε $du = -xdt$. Για $t = 0$ είναι $u = x$ και για $t = 1$ είναι $u = 0$. Τότε:

$$x \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_x^0 e^{f(u)} (-du) = \int_0^x e^{f(u)} du = \int_0^x e^{f(t)} dt.$$

Τότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt = \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt$$

οπότε

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Στην συνέχεια

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + i \int_0^x e^{f(t)} dt \Leftrightarrow z = (1+i) \int_0^x e^{f(t)} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Επειδή $e^{f(t)} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $\int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$, επομένως

$$\frac{z}{1+i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

- ii.** Βρίσκουμε $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)} dt \geq 0$, οπότε

$$\left| \frac{z}{1+i} \right| = \left| \int_0^x e^{f(t)} dt \right| = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)} dt = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(x) - 1 \quad (1), \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η f και η e^t είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση $e^{f(t)}$ και
- το άθροισμα $f(t) + e^t$,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)} dt, \quad \int_0^x [f(t) + e^t] dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = e^{f(x)}, \quad \left(\int_0^x [f(t) + e^t] dt \right)' = f(x) + e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(\int_0^x e^{f(t)} dt \right)' = \left(\int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(x) - 1 \right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x) + e^x, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1) + e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$

$$e^{f(x_2)} = f(x_2) + e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

με g την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, στο οποίο παίρνει τιμές η f . Επομένως

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f ως γνησίως αύξουσα, είναι 1-1, άρα έχει αντίστροφη.

Πάλι η f ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

- Η σχέση $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ επειδή $f(x) \geq 0$ δίνει $e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Για $x = 0$ πάλι από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0) + 1.$$

Έτσι, το $f(0)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$. Από το ερώτημα Α, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $x = 0$, που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{f(0) = 0} \quad (2)$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Έστω $y = f(x)$ με $x \geq 0$. Από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς $x \geq 0$, αφού $e^y - y \geq 1$.

Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του x είναι $f(x) = y$. Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y - y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y - y)} = e^y - y$$

Η g ως γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ είναι 1-1, έτσι $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in [0, +\infty)$$

δ. Για $x = 0$ από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)} dt = \int_0^0 [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1 \Leftrightarrow f(a) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(a) = 1} \quad (3)$$

Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$, γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο $(0, +\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0, a)$ με

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1 - 0}{a} = f'(\xi) \quad \text{ή} \quad a f'(\xi) = 1.$$