

**ΤΑΞΗ:** Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 27 Απριλίου 2014

**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.**
- α) Λάθος (βλέπε σελίδα 54 του σχολικού βιβλίου. Το σωστό είναι  $\alpha, \beta$ , ομόσημοι τότε  $\alpha \cdot \beta > 0$ ).
  - β) Σωστό (βλέπε σελίδα 63 του σχολικού βιβλίου).
  - γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου. Το σωστό είναι ότι  $y = x$ ).
  - δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 72 του σχολικού βιβλίου).
  - ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 64 του σχολικού βιβλίου).
- A2.** Βλέπε απόδειξη (1) στη σελίδα 71 του σχολικού βιβλίου.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων Β και Β' είναι:

$$P(B') = 1 - P(B) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(B') \Leftrightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}.$$

Επίσης

$$P(B - A) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(B - A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014**

**E\_3.Μλ1Α(α)**

**B2.** Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

**B3.** Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για ενδεχόμενο B ισχύει:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{40}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow N(\Omega) = 120$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η εξίσωση γίνεται:

$$(\alpha_1 - 1)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 1 = \sqrt[3]{8}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 3$$

Επειδή

$$\alpha_6 = 13$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1) \cdot \omega = 13$$

$$\Leftrightarrow 3 + 5 \cdot \omega = 13$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \omega = 13 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \omega = 10$$

$$\Leftrightarrow \omega = 2$$

Γ2. Το άθροισμα των  $v$  - πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι:

$$S_v = \frac{v}{2} \cdot [2 \cdot \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega]$$

Επειδή  $\alpha_1 = 3$ ,  $\omega = 2$  και θέλουμε  $S_v > 440$ , έχουμε:

$$S_v > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (v-1) \cdot 2] > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot (6 + 2v - 2) > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{2} \cdot (2v + 4) > 440$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 2v > 440$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 2v - 440 > 0$$

Η Διακρίνουσα του τριωνύμου

$$\text{είναι } \Delta = 4 - 4 \cdot 1(-440) =$$

$$4 + 1760 = 1764$$

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες:

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{1764}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 42}{2}$$

$$v_1 = \frac{-2 + 42}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ και}$$

$$v_2 = \frac{-2 - 42}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Επειδή ο  $v$  είναι θετικός ακέραιος, δεκτή λύση είναι η  $v_1 = 20$ .

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$v$	0	20	$+\infty$
$v^2 + 2v - 440$	-	0	+

Οπότε πρέπει  $v > 20$ .

Άρα το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνά το 440 είναι  $v = 21$ .

Γ3. Επειδή οι αριθμοί  $\alpha_2 - x^2$ ,  $\alpha_3 - x^2$ ,  $\alpha_5 - 2x^2$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ο αριθμός  $\alpha_3 - x^2$  είναι γεωμετρικός μέσος, οπότε ισχύει:

$$(\alpha_3 - x^2)^2 = (\alpha_2 - x^2) \cdot (\alpha_5 - 2x^2) \quad (1)$$

Οι αριθμοί  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_5$  είναι όροι της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος Γ1 με

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \alpha_2 = 3 + 2 \Leftrightarrow \alpha_2 = 5$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow \alpha_3 = 3 + 4 \Leftrightarrow \alpha_3 = 7$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \Leftrightarrow \alpha_5 = 3 + 8 \Leftrightarrow \alpha_5 = 11$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014**

**E\_3.Μλ1Α(α)**

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} (7-x^2)^2 &= (5-x^2) \cdot (11-2x^2) \\ \Leftrightarrow 49-14x^2+x^4 &= 55-10x^2-11x^2+2x^4 \\ \Leftrightarrow x^4-7x^2+6 &= 0 \text{ (Διτετράγωνη)} \\ \Leftrightarrow (x^2)^2-7x^2+6 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε  $x^2 = \omega$  με  $\omega \geq 0$  οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:  $\omega^2 - 7\omega + 6 = 0$   
Το τριώνυμο έχει:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -7$ ,  $\gamma = 6$ . Η διακρίνουσά του είναι:  
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$ .

Οι ρίζες του είναι:  $\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$

δηλαδή:  $\omega_1 = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$  και  $\omega_2 = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Η εξίσωση  $x^2 = \omega$  για  $\omega = 1$  γίνεται:  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = -1$

Η εξίσωση  $x^2 = \omega$  για  $\omega = 6$  γίνεται:

$$x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \text{ ή } x = -\sqrt{6}$$

Οι ακέραιες τιμές του  $x$  είναι το 1 και το -1.

Για  $x = 1$  οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - 1 = 6$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 = 9$$

Για  $x = -1$  οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - (-1)^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - (-1)^2 = 7 - 1 = 6$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 \cdot (-1)^2 = 11 - 2 = 9$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Για  $x = \pm\sqrt{6}$  οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2 - x^2 = 5 - 6 = -1$$

$$\alpha_3 - x^2 = 7 - 6 = 1$$

$$\alpha_5 - 2x^2 = 11 - 2 \cdot 6 = -1$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι  $\lambda = \frac{1}{-1} = -1$  που απορρίπτεται γιατί  $\lambda \neq -1$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-\Delta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \Delta \\ \Leftrightarrow \Delta &= \Delta^2 - 4\Delta \\ \Leftrightarrow \Delta^2 - 5\Delta &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta \cdot (\Delta - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta &= 0 \text{ ή } \Delta = 5 \end{aligned}$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) έχουμε:

- Αν  $\Delta = 0$ , η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, την  $x = 0$ .
- Αν  $\Delta = 5$ , η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Δ2. Για  $\Delta = 5$  η εξίσωση (1) γίνεται:  $x^2 - 5x + 5 = 0$

α) Από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{1} = 5 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 5$$

Έτσι ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5 \cdot 5}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \sqrt{(x-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = |x-5|$$

β) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει:  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ . Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της f πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο:  $2x^2 - 3x + 1$

Η διακρίνουσά του είναι:  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014**

**E\_3.Mλ1A(α)**

Οι ρίζες του είναι:  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{4}$ , δηλαδή:  $x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$  και  $x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται στη μορφή:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1) \cdot (2x-1)$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης  $f$  γίνεται:

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = 2x-1$$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , θα λύσουμε την εξίσωση:  $f(x) = g(x)$  με  $x \neq 1$ .

Από Δ2 και (β) ερώτημα, ισχύει:  $2x-1 = |x-5|$  (2)

Για να βγάλουμε την απόλυτη τιμή, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

➤ Αν  $x-5 \geq 0$  δηλαδή  $x \geq 5$  έχουμε  $|x-5| = x-5$ . Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} 2x-1 &= x-5 \\ \Leftrightarrow 2x-x &= -5+1 \\ \Leftrightarrow x &= -4 \end{aligned}$$

Η ρίζα απορρίπτεται διότι  $-4 < 5$ .

➤ Αν  $x-5 < 0$  δηλαδή  $x < 5$  έχουμε  $|x-5| = -(x-5) = -x+5$ . Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x-1 &= -x+5 \\ \Leftrightarrow 2x+x &= 5+1 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Η ρίζα  $x=2$  είναι δεκτή γιατί  $2 < 5$

Για  $x=2$  έχουμε ότι:  $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow f(2) = 3$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν ένα κοινό σημείο το  $A(2,3)$ .