

**ΤΑΞΗ:** Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 3 Μαΐου 2015  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 71.

**A2.** Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 31.

**A3.**  $\alpha \rightarrow \Lambda$        $\beta \rightarrow \Sigma$        $\gamma \rightarrow \Sigma$        $\delta \rightarrow \Sigma$        $\varepsilon \rightarrow \Lambda$

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Επειδή  $|2x-1|=|1-2x|$  η ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{|2x-1|}{3} - 1 &< \frac{3-|2x-1|}{4} \\ \Leftrightarrow 12 \frac{|2x-1|}{3} - 12 \cdot 1 &< 12 \frac{3-|2x-1|}{4} \\ 4|2x-1| - 12 &< 3(3-|2x-1|) \\ 4|2x-1| - 12 &< 9 - 3|2x-1| \\ 4|2x-1| + 3|2x-1| &< 12 + 9 \\ 7|2x-1| &< 21 \\ |2x-1| &< 3 \\ -3 &< 2x-1 < 3 \\ -3+1 &< 2x < 1+3 \\ -2 &< 2x < 4 \\ -1 < x < 2 &\Leftrightarrow x \in (-1, 2) \\ \text{Άρα } \Delta &= (-1, 2). \end{aligned}$$

**B2.** Εφόσον  $x \in \Delta$  ισχύει  $-1 < x < 2$ .

Άρα  $x+1 > 0$  και  $x-2 < 0$  (1)

Η παράσταση Α γράφεται:

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**Ε\_3.ΒΜλ1Α(α)**

$$A = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-2|}{x-2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} A = \frac{x+1}{x+1} - \frac{(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$A = 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$A = 0$$

Άρα ανεξάρτητη του  $x$ , δηλαδή σταθερός αριθμός.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Αφού η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, -4)$ , ισχύει:

$$f(1) = -4 \Leftrightarrow$$

$$1^2 + \kappa \cdot 1 - 3 = -4 \Leftrightarrow$$

$$1 + \kappa - 3 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = -4 - 1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\kappa = -2}$$

Έτσι ο τύπος της  $f$  γίνεται:  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ .

Για να βρούμε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ , λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Η Διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ και } x_2 = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Οπότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στα σημεία  $\Gamma(3,0)$  και  $\Delta(-1,0)$ .

Για να βρούμε το σημείο τομής της  $C_f$  με τον άξονα  $y'y$ , βρίσκουμε το

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow f(0) = -3.$$

Επομένως η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $E(0,-3)$ .

**Γ2.** Εφόσον η ευθεία  $(\epsilon)$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\zeta)$  έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Οπότε η ευθεία  $(\epsilon)$  έχει εξίσωση  $y = 3x + \beta$  (1).

$$\text{Ισχύει } f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Άρα η ευθεία  $(\epsilon)$  διέρχεται από το σημείο  $B(-1,0)$ .

Έτσι οι συντεταγμένες του σημείου  $B$  επαληθεύουν την εξίσωση (1),

$$\text{γι' αυτό ισχύει: } 0 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$  είναι  $\boxed{y = 3x + 3}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3.ΒΜλ1Α(α)**

**Γ3.** Επειδή τα σημεία  $K(1, a), \Lambda(3, \beta), M(5, \gamma)$  ανήκουν στην ευθεία  $\varepsilon: y = 3x + 3$ , οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Άρα ισχύει: } a = 3 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\beta = 3 \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow \beta = 12$$

$$\gamma = 3 \cdot 5 + 3 \Leftrightarrow \gamma = 18$$

Για να είναι οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει και

$$\text{αρκεί } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2 \cdot 12 = 6 + 18 \Leftrightarrow 24 = 24 \text{ που ισχύει.}$$

Οπότε οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. i.** Για την διακρινούσα  $\Delta$  της εξίσωσης (1) ισχύει:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Delta = (4\lambda - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda(3 - 8\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 16\lambda^2 - 16\lambda + 4 - 12\lambda + 32\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 48\lambda^2 - 28\lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4(12\lambda^2 - 7\lambda + 1) \quad (2)$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο:  $12\lambda^2 - 7\lambda + 1$

Η διακρινούσά του  $\Delta$  είναι:

$$\Delta' = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Delta' = 49 - 48 \Leftrightarrow$$

$$\Delta' = 1$$

Άρα οι ρίζες του είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta'}}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2 \cdot 12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{7-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ και } \lambda_2 = \frac{7+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Έτσι:

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3.ΒΜλ1Α(α)**

$$12\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 12\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 3 \cdot 4 \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = (3\lambda - 1) \cdot (4\lambda - 1). \quad (3)$$

Άρα από (2) και (3) έχουμε:

$$\Delta = 4(3\lambda - 1) \cdot (4\lambda - 1)$$

ii. Καθώς η (1) έχει διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 1)(4\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad 4\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Ισχύει  $\lambda_1 < \lambda_2$ , άρα:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Για  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4}$  η διπλή ρίζα της (1) είναι

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{(4\lambda_1 - 2)}{2} = -\frac{(4 \cdot \frac{1}{4} - 2)}{2} = -\frac{(1 - 2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Δ2.** Άρα  $P(A) = x_0 = \frac{1}{2}$ .

$$P(A \cap B) = \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

$$P[(A \cup B)'] = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Όμως } P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}.$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3.ΒΜλ1Α(α)**

$$P(B) = \frac{9}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{12}.$$

**Δ3.** Εφόσον η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει  $\Delta > 0$ . Το πρόσημο της Διακρίνουσας  $\Delta$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$\lambda$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\Delta$	+	0	-	+

$$\text{Έτσι } \lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Από τους τύπους Vietta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(4\lambda - 2)}{1} = -4\lambda + 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(3 - 8\lambda)}{1} = 3\lambda - 8\lambda^2.$$

$$\text{Ισχύει } 4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 8\lambda^2) = 3(x_1 + x_2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 8\lambda^2) = 3(-4\lambda + 2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda - 32\lambda^2 = -12\lambda + 6 - 26 \Leftrightarrow$$

$$32\lambda^2 - 24\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$8\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0.$$

Η Διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-5) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 36 + 160 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 196.$$

$$\text{Άρα } \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 8} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{6 + 14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \text{ και } \lambda_2 = \frac{6 - 14}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}.$$