

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 16 Απριλίου 2014**

**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 32.

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**A.2.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 60.

Για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  ισχύει η ταυτότητα  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ .

Απόδειξη

Αν  $M(x, y)$  είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της οποιασδήποτε γωνίας  $\omega$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:  $\eta\mu\omega = y$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = x$

Επειδή όμως,

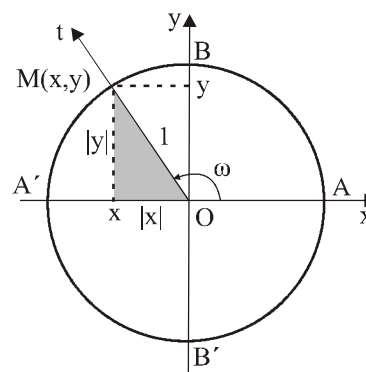
$$(OM) = 1 \text{ και } (OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1.$$



**A.3.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 174.

Αν  $a > 0$  με  $a \neq 1$  και  $\theta > 0$ , τότε:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow \log_a \theta = x$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο  $\log_a \theta$  είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον  $a$  για να βρούμε το  $\theta$ .

- A.4. α) Σωστή  
 β) Σωστή  
 γ) Σωστή  
 δ) Λάθος  
 ε) Σωστή

**ΘΕΜΑ Β**

B.1. Πρέπει  $P(1) = 3\alpha + 1$

$$\text{Άρα } 1^3 + 2\alpha - \alpha^2 + 2 = 3\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2.$$

B.2.α. Για  $\alpha = 1$  είναι  $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x + 2 & x^2 + x + 1 \\ -x^3 - x^2 - x & x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 2 & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \hline -3x + 1 & \end{array}$$

Έτσι σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση του  $P(x)$  με το  $Q(x)$  το πηλίκο είναι  $\pi(x) = x + 1$ , ενώ το υπολοιπο  $\upsilon(x) = -3x + 1$ .

B.2.β. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει  $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \neq 0$ , είναι  $\Delta = -3$  οπότε το τριώνυμο  $Q(x) = x^2 + x + 1$  δεν έχει ρίζες, δηλαδή ισχύει  $x^2 + x + 1 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και μάλιστα  $x^2 + x + 1 > 0$  αφού είναι ομόσημο του  $a = 1 > 0$ .

Διαδοχικά έχουμε

$$\frac{P(x) + x - 2}{Q(x)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - x + 2 + x - 2}{x^2 + x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x+1) - (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) \geq 0. \quad (\text{Σχόλιο 1})$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+
x-1	-	0	0	+
Γινόμενο	-	0	-	+

Από τον παραπάνω πίνακα πρόσημου έχουμε ότι η ανίσωση  $(x+1)^2(x-1) \geq 0$  επαληθεύεται για  $x \in [1, +\infty)$  ή  $x = -1$ . (Σχόλιο 2)

(1) Σχόλιο:

Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος οπότε έχουμε  $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 0$ . Στη συνέχεια κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και παίρνουμε  $\frac{x^3 + 2x^2 - (x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \geq 0$ . Εδώ όμως παρατηρούμε ότι το  $Q(x) = x^2 + x + 1$  έχει  $\Delta = -3 < 0$  οπότε έχει το ίδιο πρόσημο με το  $a = 1 > 0$ , δηλαδή ισχύει  $x^2 + x + 1 > 0$  οπότε μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά.

(2) Σχόλιο:

Το " $=$ " της  $(x+1)^2(x-1) \geq 0$  επαληθεύεται για  $x = -1$  ή  $x = 1$  ενώ το " $>$ " επαληθεύεται για  $x \in (1, +\infty)$  έτσι έχουμε  $x \in \{-1\} \cup [1, +\infty)$ .

**B.2.γ.** Πρέπει  $Q(x) = x^2 + x + 1 \geq 0$  που ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και μάλιστα

$$\Pi(x) = x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

η οποία είναι δεκτή.

Σχόλιο:

Για κάθε  $x \geq -1$  και τα δυο μέλη της εξίσωσης  $x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}$  είναι μη αρνητικά οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο.

Εναλλακτικά:

$$x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow (x + 1)^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x = 0$$

Κάνουμε επαλήθευση. Για  $x = 0$  η  $x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}$  μας δίνει  $0 + 1 = \sqrt{0^2 + 0 + 1}$  το οποίο ισχύει. Άρα η ρίζα  $x = 0$  είναι δεκτή.

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1.** Επειδή  $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \beta x\right) = -\sigma\upsilon\nu(\beta x)$  τότε  $f(x) = -\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x)$ .

Πρέπει  $f(0) = -2$  και  $f(\pi) = -1$ .

Άρα  $-\alpha \sin 0 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$  και  $-\alpha \sin(\beta\pi) = -1 \Leftrightarrow \sin(\beta\pi) = \frac{1}{\alpha}$

δηλ.  $\sin(\beta\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  ή  $\beta\pi = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Έτσι  $\beta = 2k + \frac{1}{3}$  ή  $\beta = 2k - \frac{1}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Έστω  $\beta = 2k + \frac{1}{3}$ , πρέπει  $0 \leq 2k + \frac{1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{3}$ .

Άρα  $k = 0$ , οπότε  $\beta = \frac{1}{3}$ .

Έστω  $\beta = 2k - \frac{1}{3}$ , πρέπει  $0 \leq 2k - \frac{1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 2k \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{2}{3}$  που είναι αδύνατη γιατί  $k \in \mathbb{Z}$ .

Έχουμε λοιπόν  $\alpha = 2$  και  $\beta = \frac{1}{3}$ .

Άρα  $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ .

Γ.2. Επειδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

και αφού είναι  $f(0) = -2$  και  $f(3\pi) = 2$  έχουμε

$$f(0) \leq f(x) \leq f(3\pi) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έτσι, η  $f$  παρουσιάζει

- ελάχιστο για  $x = 0$  το  $f(0) = -2$
- μέγιστο για  $x = 3\pi$  το  $f(3\pi) = 2$

Εναλλακτικά:

Επειδή  $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ , το ελάχιστο της  $f$  είναι το  $-2$  και το μέγιστο το  $2$ .

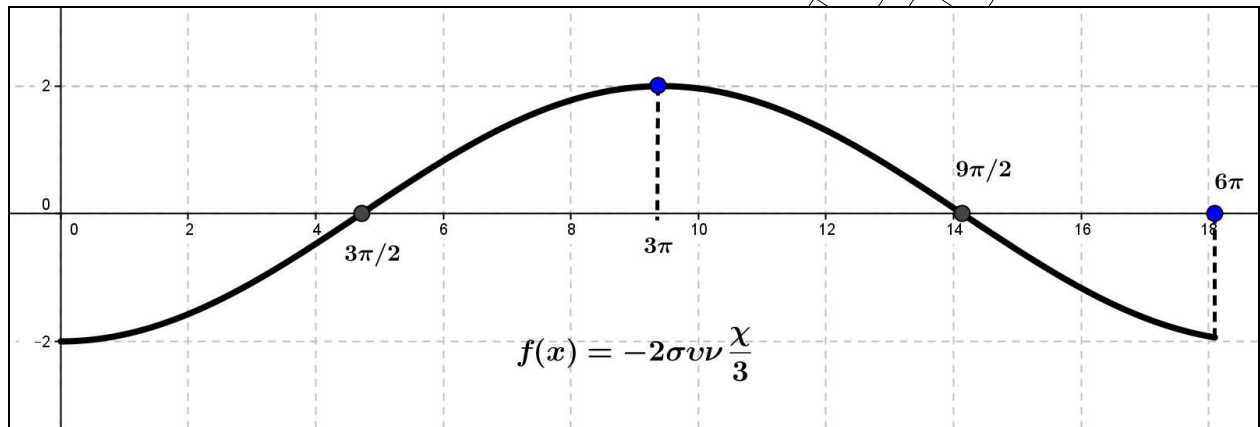
(σχόλιο σελ.81)

Η περίοδος της  $f$  είναι  $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ .

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6\pi]$  είναι ο εξής:

$x$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$3\pi$	$\frac{9\pi}{2}$	$6\pi$
$f(x)$	-2	0	2	0	-2

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 3\pi]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[3\pi, 6\pi]$ .

**Γ.3.** Είναι

$$f(0) = -2, f(-\pi) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1, f(2\pi) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \text{ και}$$

$$f(2014\pi) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2014\pi}{3}\right) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{671 \cdot 3\pi + \pi}{3}\right) = -2\sigma\upsilon\nu\left(671\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\left(670\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 1.$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2\lambda x + y = 4\lambda \\ -\lambda x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε } D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + \lambda = -\lambda(2\lambda - 1).$$

$$\text{Πρέπει } D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Για } \lambda = 0 \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ που είναι αόριστο.}$$

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{2} \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} -x + y = 2 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + y = 0 \end{cases} \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα το  $(\Sigma)$  για  $\lambda = 0$  έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (\kappa, 0) \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ.1. Πρέπει  $4 \cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x \neq 2^{-2} \Leftrightarrow x \neq -2$

και  $\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1} > 0 \Leftrightarrow (4-2^x)(4 \cdot 2^x - 1) > 0$ .

Έστω  $2^x = \omega$  τότε  $(4-\omega)(4\omega-1) > 0$ .

x	$-\infty$	1/4	4	$+\infty$
4 - ω	+	0	+	-
4ω - 1	-	0	+	+
Γινόμενο	-	0	+	-

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε  $\frac{1}{4} < \omega < 4$  όμως  $2^x = \omega$

Έτσι  $2^{-2} < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$  (Σχόλιο 1)

(επειδή η  $2^x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , αφού έχει βάση  $2 > 1$ )

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το  $A = (-2, 2)$ .

(1) Σχόλιο:

Από την επίλυση των παραδειγμάτων σελ.167 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι εφαρμόστηκε η πρόταση:

Όταν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , για αυτόν το λόγο την εφαρμόσαμε πιο πάνω χωρίς απόδειξη.

Δ.2. Για κάθε  $x \in (-2, 2)$  τότε και  $-x \in (-2, 2)$ .

Έχουμε

$$f(-x) = \ln\left(\frac{4-2^{-x}}{4 \cdot 2^{-x} - 1}\right) = \ln\left(\frac{4-\frac{1}{2^x}}{\frac{4}{2^x}-1}\right) = \ln\left(\frac{4 \cdot 2^x - 1}{4 - 2^x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{4 \cdot 2^x - 1}{4 - 2^x}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{4 - 2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right) = -f(x).$$

Δηλαδή η f είναι περιττή συνάρτηση.

Δ.3. Πρέπει  $f(x) = h(x)$ , όπου  $x \in (-2, 2)$ .

Διαδοχικά έχουμε  $\ln\left(\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right) = x \ln 2 - \ln 3$

$$\ln\left(\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right) = \ln\left(\frac{2^x}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1} = \frac{2^x}{3} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 12 - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0.$$

Έστω  $2^x = \omega > 0$ , τότε  $2\omega^2 + \omega - 6 = 0$ .

Άρα  $\omega = -2$  (απορρίπτεται) ή  $\omega = \frac{3}{2}$  δεκτή αφού  $-2 < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x < 4$

και προφανώς  $\frac{1}{4} < \frac{3}{2} < 4$ , άρα οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $h$  έχουν κοινό σημείο.

$$\text{Είναι } 2^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$$

Άρα το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων  $f$  και  $h$  έχει τετμημένη  $x_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$ .

Δ.4. Επειδή  $\ln^2(e^2) = (\ln e^2)^2 = (2 \ln e)^2 = 4$  η ανίσωση γίνεται:

$$-4f(x) > 4f(-x) + \ln^2|x| - \ln x^2 - 3 \text{ πρέπει } x \in A = (-2, 2) \text{ και } |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

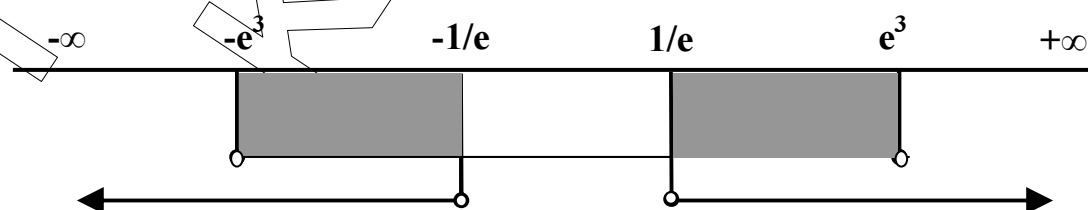
Άρα  $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ .

Όμως η  $f$  είναι περιττή, δηλαδή  $f(-x) = -f(x)$  οπότε η παραπάνω ανίσωση γίνεται  $\ln^2|x| - 2\ln|x| - 3 < 0$ .

Έστω  $\ln|x| = \omega$  τότε  $\omega^2 - 2\omega - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 3$ .

Δηλαδή  $-1 < \ln|x| < 3 \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln|x| < \ln e^3 \Leftrightarrow e^{-1} < |x| < e^3 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < |x|$  και  $|x| < e^3$

ισοδύναμα  $x < -\frac{1}{e}$  ή  $x > \frac{1}{e}$  και  $-e^3 < x < e^3$



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε λύσεις  $x \in (-e^3, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, e^3)$ .

Επειδή όμως πρέπει  $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ , τότε  $x \in (-2, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 2)$ .