

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015  
Β' ΦΑΣΗ

Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 10 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (βλέπε σχολικό σελ. 135)

A2. Σχολικό σελίδα 97.

A3. Για την  $f(x) = \alpha^x$  έχουμε:

- πεδίο ορισμού το  $A = \mathbb{R}$
- σύνολο τιμών το  $B = (0, +\infty)$ .

Για την  $g(x) = \log_\alpha x$ , με  $0 < \alpha \neq 1$  έχουμε:

- πεδίο ορισμού το  $A = (0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το  $B = \mathbb{R}$

A4. α. ΛΑΘΟΣ

β. ΛΑΘΟΣ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΣΩΣΤΟ

ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x - 1$

B1. Αφού  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$

$$-2 \leq 2\sigma\upsilon\nu 2x \leq 2$$

$$-3 \leq 2\sigma\upsilon\nu 2x - 1 \leq 1$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$ . Έτσι έχουμε  $\max f = 1$ ,  $\min f = -3$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)**

Η περίοδος της  $f$  είναι  $T = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi}$

**B2.**  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$2x = 2κπ \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = κπ \pm \frac{\pi}{6}, κ \in \mathbb{Z}}$$

Αφού  $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq κπ + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{6} \leq κπ \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq κ \leq \frac{11}{6} \text{ κ} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

- $κ = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

- $κ = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$

Αφού  $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq κπ - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{6} \leq κπ \leq \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq κ \leq \frac{13}{6} \text{ κ} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

- $κ = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$

- $κ = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$

Έτσι η  $C$  τέμνει τον  $x$ 'ς στα σημεία:  $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ ,  $B\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$  και

$$\Delta\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right).$$

**B3.** Υπολογίζουμε:

- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

- $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - 1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)**

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$$\text{Έτσι } K = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot (-\sqrt{3}-1) + 0}{1 - (-1)} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{-(\sqrt{3}^2 - 1^2)}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Έχουμε  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- $P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + \gamma = 24 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 32$  (1)

- $P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 8}$

- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1$  (2)

$$\text{Έτσι } \begin{cases} (1) \gamma=8 \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ \alpha + \beta = -9 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{cases} + \{6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -10}$$

**Γ2. α)** Το πολυώνυμο γίνεται:  $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$ . Με το σχήμα Horner για  $x = 1$  βρίσκουμε:

1	1	-10	8	$x=1$
	1	2	-8	
1	2	-8	0	

Οπότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  γίνεται  $(x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0$ , επομένως  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$  ή  $x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x=2$  ή  $x=-4$ . Άρα οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  είναι οι  $-4, 1, 2$ .

**β)** Η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ , όταν  $f(x) < 0$ .

Η ανίσωση  $f(x) < 0$  αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2)$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)**

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
x-1	-		-	0	+
$x^2+2x-8$	+	0	-		+
f(x)	-	0	+	0	+

Γ3.  $\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)+f(-x)-18}$  (1)

Είναι  $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 10(-x) + 8 = -x^3 + x^2 + 10x + 8$ , επομένως  
 $f(x) + f(-x) - 18 =$

$$= x^3 + x^2 - 10x + 8 - x^3 + x^2 + 10x + 8 - 18 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1).$$

Πρέπει  $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4, 1, 2$  και

$f(x) + f(-x) - 18 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ , επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι  $x \neq -4, -1, 1, 2$  η ανίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{x+4}{f(x)} - \frac{2}{f(x)+f(-x)-18} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+x^2-10x+8} - \frac{2}{2(x^2-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)} - \frac{2}{2(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0.$$

Είναι  $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ,  $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ,  $x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	-4	-1	1	2	$+\infty$
x-1	-		-		-	0
x+1	-		-	0	+	
x-2	-		-		-	0
	-		-	0	+	0

Η ανίσωση αληθεύει όταν  $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (1, 2)$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)**

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. α)** Είναι  $f(\ln x) = 2^{\ln x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} = 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}}$ , με  $x > 0$ .

**β)** Πρέπει  $x > 0$  και  $f(\ln x) > 0$ , οπότε  $2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} > 0 \Leftrightarrow (2^{\ln x})^2 - 1 > 0$  (αφού είναι  $2^{\ln x} > 0$ )  
 $(2^{\ln x} - 1) \cdot (2^{\ln x} + 1) > 0$  και επειδή είναι  $2^{\ln x} + 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$ , τότε  
 $2^{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 1 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 2^0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$ .  
 Οι ανισώσεις  $x > 0$  και  $x > 1$  συναληθεύουν όταν  $x \in (1, +\infty)$ , επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$  είναι το  $(1, +\infty)$ .

**Δ2.** Είναι  $h(x) = \ln \frac{3}{x} + \ln \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) =$   
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x+1-1}{x+1} + \ln \frac{x+2-1}{x+2} + \ln \frac{2+x}{2} =$   
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x+1}{x+2} + \ln \frac{x+2}{2}$ .

Για  $x > 0$  είναι  $\frac{3}{x} > 0$ ,  $\frac{x}{x+1} > 0$ ,  $\frac{x+1}{x+2} > 0$ ,  $\frac{x+2}{2} > 0$ ,

οπότε  $h(x) = \ln \left( \frac{3}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{2} \right) = \ln \frac{3}{2}$ .

**Δ3.** Για  $x > 1$  έχουμε

$$h(x) = g(x) \cdot \ln \frac{3}{2} = \ln(f(\ln x)) \Leftrightarrow f(\ln x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} = \frac{3}{2}.$$

Θέτουμε  $2^{\ln x} = \omega > 0$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\omega - \frac{1}{\omega} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\omega^2 - 3\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = -\frac{1}{2}$$

Η τιμή  $\omega = -\frac{1}{2}$  απορρίπτεται γιατί  $-\frac{1}{2} < 0$ , οπότε

$$\omega = 2, 2^{\ln x} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

**Δ4.** Είναι  $f(1) = 2^1 - \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $f(2) = 2^2 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ , τότε

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
 Β' ΦΑΣΗ

**Ε.3.ΒΜλ2Γ(α)**

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - 2 \cdot \frac{15}{4}\ln x}{6 \cdot \frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - \frac{15}{2}\ln x}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}(\ln^2 x - 5\ln x)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6}.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$ , οπότε

$$-1 \leq \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6} \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \text{ με } x > 0 \text{ και έχουμε τις}$$

ανισώσεις:

$$\ln^2 x - 5\ln x \geq -6 \quad (1) \text{ και } \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \quad (2)$$

(1):  $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \geq 0$ , θέτουμε  $\ln x = \omega$ , οπότε  $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$ . Οι ρίζες του τριωνύμου  $\omega^2 - 5\omega + 6$  είναι οι  $\omega = 2$ ,  $\omega = 3$ .

$\omega$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$
$\omega^2 - 5\omega + 6$	+	0	-	0
				+

Η ανίσωση  $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$  αληθεύει όταν  $\omega \leq 2$  ή  $\omega \geq 3$ , οπότε  $\ln x \leq 2$  ή  $\ln x \geq 3$ .

$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2$  ή  $\ln x \geq \ln e^3 \Leftrightarrow x \leq e^2$  ή  $x \geq e^3$  και αφού πρέπει  $x > 0$  τότε  $x \in (0, e^2] \cup [e^3, +\infty)$ .

(2):  $\ln^2 x - 5\ln x - 6 \leq 0$ , θέτουμε  $\ln x = \varphi$ , οπότε  $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$ . Οι ρίζες του τριωνύμου  $\varphi^2 - 5\varphi - 6$  είναι οι  $\varphi = -1$ ,  $\varphi = 6$ .

$\varphi$	$-\infty$	$-1$	$6$	$+\infty$
$\varphi^2 - 5\varphi - 6$	+	0	-	0
				+

Η ανίσωση  $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$  αληθεύει όταν  $-1 \leq \varphi \leq 6$ , οπότε  $-1 \leq \ln x \leq 6 \Leftrightarrow$

$$\ln e^{-1} \leq \ln x \leq \ln e^6 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e^6 \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{1}{e}, e^6 \right]$$

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν όταν  $x \in \left[ \frac{1}{e}, e^2 \right] \cup [e^3, e^6]$ .