

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 4 Μαΐου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 83.

A.2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41.

- A.3.**
- i. Σωστό
 - ii. Σωστό
 - iii. Σωστό
 - iv. Λάθος
 - v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B.1. Είναι $|\vec{\alpha}| = 4$ και $2|\vec{\beta}| = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2$, οπότε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 4 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

B.2.

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \kappa \vec{\beta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + \kappa \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \kappa \cdot 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa + 16 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -4$$

B.3. i. Είναι $\cos(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}) = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|}$ και αφού

- $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 4 - 4|\vec{\beta}|^2 = 4 - 4 \cdot 2^2 = -12$

- και

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014

E_3.Μλ2ΘΤ(α)

$$|\vec{\gamma}|^2 = |\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 8 \cdot 4 + 16|\vec{\beta}|^2$$

$$= 4^2 - 32 + 16 \cdot 2^2 = 48$$

θα είναι $|\vec{\gamma}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (αφού $|\vec{\gamma}| \geq 0$)

$$\text{Άρα συν}(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{-12}{2 \cdot 4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Είναι $0 \leq (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \leq \pi$, οπότε $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

ii. Αφού $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \parallel \vec{\beta}$ θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{\beta}$.

Οπότε

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot 2^2 = 2^2 \lambda \Leftrightarrow$$

$$4\lambda = -12 \Leftrightarrow \lambda = -3$$

Δηλαδή $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = -3 \cdot \vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Έχουμε

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1-y)(x-1+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1-y=0 \text{ ή } x-1+y=0 \Leftrightarrow$$

$$y = x-1 \text{ ή } y = -x+1$$

Οπότε η (1) παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x-1$ και $\varepsilon_2 : y = -x+1$, με κλίσεις αντίστοιχα $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Αφού $\lambda_1 \lambda_2 = 1 \cdot (-1) = -1$ θα είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Λύνουμε το σύστημα (Σ) $\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+1 \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, οπότε το (Σ) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών είναι το $E(1,0)$.

Γ.2 (Α' τρόπος)

Η εξίσωση $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με $B = \lambda^2 + 1 \neq 0$, οπότε παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\varepsilon_\lambda : (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, τότε

- Για $\lambda = 0$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται $\varepsilon_0 : x + y - 1 = 0$
- Για $\lambda = 1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται $\varepsilon_1 : 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$.

Οπότε έχουμε $\begin{cases} y = -1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Δηλαδή οι ευθείες ε_0 και ε_1 έχουν κοινό σημείο το $Z(2, -1)$.

Όμως για $x = 2$ και $y = -1$ η (2) γίνεται

$$(2\lambda^2 - 3\lambda + 1) \cdot 2 + (\lambda^2 + 1) \cdot (-1) - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 4\lambda^2 - 6\lambda + 2 - \lambda^2 - 1 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$$

Άρα το $Z \in \varepsilon_\lambda$.

Επομένως όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας θα διέρχονται από το σημείο $Z(2, -1)$.

(Β' τρόπος)

Από την $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$2\lambda^2 x - 3\lambda x + x + \lambda^2 y + y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 (2x + y - 3) + \lambda (-3x + 6) + (x + y - 1) = 0$$

Για να είναι μηδενικό πολυώνυμο του λ , πρέπει

$$\begin{cases} -3x + 6 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y - 3 = 0 \\ 2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι το $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$, άρα όλες οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας διέρχονται από το $Z(2, -1)$.

Γ.3. i. Η ζητούμενη παραβολή είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Αφού $E(1,0)$ η εστία της, θα είναι $\frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε η παραβολή θα είναι η $c : y^2 = 4x$.

Η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή $\delta : x = -1$.

ii. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα άκρα της χορδής της c με μέσο το σημείο Z , τότε

- $y_1^2 = 4x_1$ και

- $y_2^2 = 4x_2$.

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$y_2^2 - y_1^2 = 4(x_2 - x_1) \Leftrightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4(x_2 - x_1) \quad (3)$$

Όμως το $Z(2, -1)$ είναι μέσο του AB οπότε

$$-1 = \frac{y_2 + y_1}{2} \Leftrightarrow y_2 + y_1 = -2$$

Επομένως η (3) γίνεται

$$(y_2 - y_1)(-2) = 4(x_2 - x_1)$$

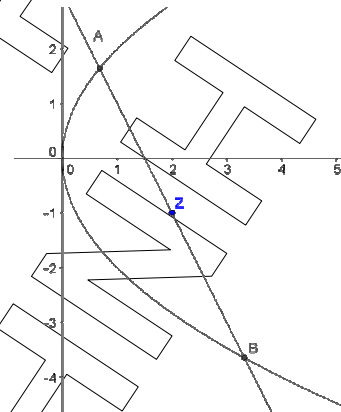
Αν $x_1 = x_2$, τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς x' , οπότε το Z , που είναι μέσο του AB , θα βρίσκεται στον x' . Αυτό είναι άτοπο, αφού η τεταγμένη του Z είναι -1 , οπότε $x_1 \neq x_2$.

Επομένως

$$(y_2 - y_1)(-2) = 4(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = -2,$$

όπου λ_{AB} η κλίση της AB . Αφού $Z(2, -1)$ σημείο της, έχουμε

$$AB: y + 1 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 3$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Είναι $N(6\mu - 2, 6\lambda)$, με $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Αν } N(x, y) \text{ τότε } \begin{cases} x = 6\mu - 2 \\ y = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\mu = x + 2 \\ 6\lambda = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36\mu^2 = (x + 2)^2 \\ 36\lambda^2 = y^2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$36\mu^2 + 36\lambda^2 = (x + 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 36(\mu^2 + \lambda^2)$$

και αφού $\mu^2 + \lambda^2 = 1$, η παραπάνω γίνεται $(x + 2)^2 + y^2 = 36$.

Δ.2. (Α' τρόπος)

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $\varepsilon_1: x = 4$ εφάπτεται στον κύκλο c , διότι

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|-2 + 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 6 = \rho$$

Επίσης από το Δ διέρχονται και άπειρες ευθείες της μορφής

$$\varepsilon: y - 8 = \lambda(x - 4) \Leftrightarrow \lambda x - y + 8 - 4\lambda = 0$$

Για να εφάπτεται στον κύκλο θα πρέπει

$$d(K, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \frac{|-2\lambda + 8 - 4\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \left| \lambda - \frac{4}{3} \right| = 6\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \lambda - \frac{4}{3} \right|^2 = (\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \frac{16}{9} = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24\lambda + 16 = 9 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{24}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: \frac{7}{24}x - y + 8 - 4 \cdot \frac{7}{24} = 0 \Leftrightarrow 7x - 24y + 164 = 0$$

(B' τρόπος)

Η ζητούμενη ευθεία είναι της μορφής $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Όμως $\Delta(4, 8) \in \varepsilon$, οπότε $4A + 8B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = -4A - 8B$ και με

αντικατάσταση στην παραπάνω προκύπτει:

$$\varepsilon: Ax + By - 4A - 8B = 0 \quad (1)$$

Για να είναι εφαπτόμενη στον κύκλο ε πρέπει και αρκεί

$$d(K, \varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \frac{|-2A + 0B - 4A - 8B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 6 \Leftrightarrow$$

$$|6A + 8B| = 6\sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow |6A + 8B|^2 = (6\sqrt{A^2 + B^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$36A^2 + 96AB + 64B^2 = 36A^2 + 36B^2 \Leftrightarrow$$

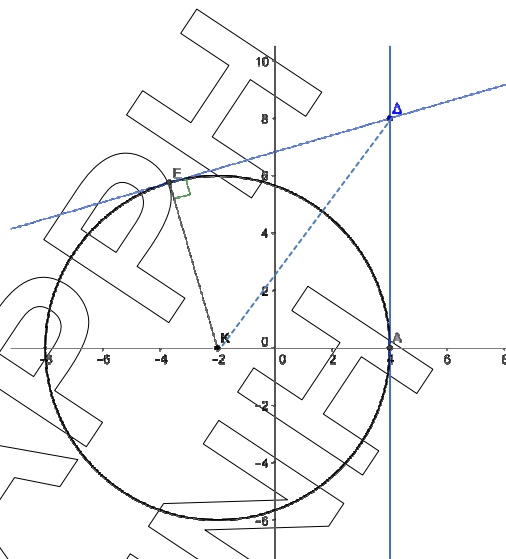
$$96AB + 28B^2 = 0 \Leftrightarrow 4B(24A + 7B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = 0 \text{ ή } B = -\frac{24}{7}A$$

- Αν $B = 0$ τότε είναι $A \neq 0$, διότι η (1) παριστάνει ευθεία. Οπότε από την (1) έχουμε:

$$Ax + 0y - 4A - 8 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow Ax = 4A \Leftrightarrow x = 4$$

- Αν $B = -\frac{24}{7}A$ τότε είναι $A \neq 0$, διότι αν ήταν $A = 0$ θα είχαμε και $B = 0$, που είναι άτοπο διότι η (1) παριστάνει ευθεία. Οπότε από (1) θα έχουμε:



$$Ax - \frac{24}{7}Ay - 4A - 8 \cdot \left(-\frac{24}{7}\right)A = 0 \Leftrightarrow x - \frac{24}{7}y - 4 + \frac{192}{7} = 0 \Leftrightarrow$$

$$7x - 24y - 28 + 192 \Leftrightarrow 7x - 24y + 164$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1 : x = 4 \text{ και } \varepsilon_2 : 7x - 24y + 164 = 0$$

Δ.3. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΔΚΑ και ΔΚΕ είναι ίσα, διότι

- Ορθογώνια τρίγωνα ($\hat{E} = \hat{A} = 90^\circ$)
- ΔΚ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- ΚΑ=ΚΕ=ρ

Οπότε $(\Delta ΚΑ) = (\Delta ΚΕ)$. Έτσι

$$(\Delta ΕΚΑ) = 2(\Delta ΚΑ) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48 \text{ τ.μ.}$$

Δ.4. Αν (M, ρ_1) κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο c και διέρχεται από το σημείο $\Sigma(2, 0)$, πρέπει και αρκεί

$$(KM) = (KN) - (MN) = \rho - \rho_1, \quad (\rho_1 < \rho)$$

$$\text{και } (M\Sigma) = \rho_1$$

Δηλαδή έχουμε

$$(KM) = \rho - (M\Sigma) \Leftrightarrow (M\Sigma) + (MK) = \rho = 6$$

$$\text{Αφού } (K\Sigma) = 4 < 6 = (MK) + (M\Sigma) \text{ ο}$$

γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η έλλειψη με εστίες Σ και Κ και μεγάλο άξονα 6.

Επομένως $\gamma = 2$, $\alpha = 3$ και

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5}.$$

Και η εξίσωσή της είναι:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

