

**ΤΑΞΗ:** 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 3 Μαΐου 2015  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω συνάρτηση  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $\Delta$  διάστημα του  $\mathbb{R}$ . Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε:  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $F$  λέγεται παράγουσα συνάρτηση της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ .

**A2.**

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

**A3.**

1. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$ .

2. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

3. Αν  $\alpha < \beta$  και  $c =$  πραγματικός αριθμός, τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c \cdot (\beta - \alpha)$ .

4.  $CV = \frac{s}{x} \cdot 100\%$ .

5.  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx = \left[ -\frac{1}{g(x)} \right]_{\alpha}^{\beta}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3ΒΜΕλ3Α(α)**

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.**

Αριθμός ωρών $x_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Συχνότητα $v_i$	$K_i$	$K_i \cdot v_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i(\bar{x} - x_i)^2$
[0,2)	10	4	1	4	25	100
[2,4)	20	8	3	24	9	72
[4,6)	15	6	5	30	1	6
[6,8)	20	8	7	56	1	8
[8,10)	35	14	9	126	9	126
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>	100	40		240		312

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + f_3\% + 20 + 35 = 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_3\% = 100 - 10 - 20 - 20 - 35 \Leftrightarrow f_3\% = 15$$

$$v_1 = f_1 \cdot v = 0,10 \cdot 40 = 4, \quad v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8, \quad v_3 = f_3 \cdot v = 0,15 \cdot 40 = 6$$

$$v_4 = f_4 \cdot v = 0,20 \cdot 40 = 8, \quad v_5 = f_5 \cdot v = 0,35 \cdot 40 = 14$$

**B2.**  $\bar{x} = \frac{240}{40} = 6$

**B3.**  $s^2 = \frac{312}{40} = 7,8$

**B4.**  $\bar{x}_{ολ} = \frac{240 + 8 \cdot 60}{40 + 60} = \frac{240 + 480}{100} = \frac{720}{100} = 7,2$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - 3\sqrt{x}}{2x^2 - x - 1} = \dots = \frac{0}{0}$  (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3 - 3\sqrt{x})(3 + 3\sqrt{x})}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3^2 - (3\sqrt{x})^2}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9 - 9x}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3 + 3\sqrt{x})} =$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3ΒΜΕΛ3Α(α)**

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-9(x-1)}{2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-9}{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{-9}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)(3+3\sqrt{1})} = \frac{-9}{(2+1)6} = \frac{-9}{18} = -\frac{1}{2}$$

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ , αφού η εξίσωση  $2x^2 - x - 1 = 0$  έχει ρίζες

$$x = 1, x = -\frac{1}{2}$$

**Γ2.**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ -\frac{1}{2}e^{x-1} + \ln(2-x) \right] = -\frac{1}{2}e^{1-1} + \ln(2-1) = -\frac{1}{2}e^0 + \ln 1 = -\frac{1}{2}$

**Γ3.** Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x=1$ , θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (I)$$

$$(I) \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \end{cases}$$

**Γ4.** Από τον 3<sup>ο</sup> κλάδο (για  $x < 1$ ) θα υπολογίσουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^{x-1})' + [\ln(2-x)]' = -\frac{1}{2}e^{x-1}(x-1)' + \frac{1}{2-x}(2-x)' =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-1} \cdot 1 + \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}e^{x-1} - \frac{1}{2-x}$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}e^{-1-1} - \frac{1}{2-(-1)} = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2+1} = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{3}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$f'(x) = \alpha \frac{(e^x)' \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \alpha \frac{e^x \cdot (x^2 + 2) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \alpha \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \frac{e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 2)}{(0^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**Ε\_3ΒΜΕΛ3Α(α)**

Δ2. Παρατηρούμε ότι  $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $e^x > 0$

και  $x^2 - 2x + 2 > 0$  (για την εξίσωση, έχουμε  $\Delta = -4 < 0$ ). Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Δ3. Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , θα είναι και γνησίως αύξουσα στο  $[e, \pi]$ . Επειδή  $e < \pi \Rightarrow f(e) < f(\pi)$ .

Δ4.  $g(x) = (x-1)(x^2+2) \frac{e^x}{x^2+2} \Leftrightarrow g(x) = (x-1)e^x$

Το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο  $E = \int_0^1 |g(x)| dx$ .

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η παράσταση  $x-1 < 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ ,  $e^x > 0$  πάντα.

Άρα  $g(x) < 0$  στο  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |g(x)| dx = -\int_0^1 (x-1)e^x dx = -\int_0^1 (x-1)(e^x)' dx = -\left[ (x-1)e^x \right]_0^1 + \int_0^1 (x-1)' e^x dx = \\ &= -\left[ (1-1)e^1 - (0-1)e^0 \right] + \int_0^1 e^x dx = -(0+1) + \left[ e^x \right]_0^1 = -1 + e^1 - e^0 = -1 + e - 1 = e - 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$