

**ΤΑΞΗ:** 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 13 Απριλίου 2014

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής στο A;

**Μονάδες 4**

**A3.** Τι λέγεται ιστόγραμμα συχνοτήτων και πώς κατασκευάζεται;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται σε ένα σύνολο A τότε το πηλίκο

$$R = \frac{f}{g} \text{ με } R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ορίζεται στο A.}$$

**γ)** Η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

**δ)** Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες  $v_1, v_2, \dots, v_k$  αντίστοιχα, τότε η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$$

**ε)** Για την πιθανότητα του κενού συνόλου ισχύει ότι:  $P(\emptyset) = 1$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ , όπου  $a, b$  είναι πραγματικοί αριθμοί, και ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα σημεία  $M(\kappa, f(\kappa))$  της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  και τα σημεία  $N(\lambda, f'(\lambda))$  της καμπύλης της συνάρτησης  $f'$ . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(2, 5)$  και η εφαπτομένη της στο σημείο  $A$  έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 12, τότε:

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 2$  και  $b = -3$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $B(-1, f(-1))$ .

**Μονάδες 4**

**B3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι  $f(2013) < f(2014)$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Αν  $A = \{ \kappa \in \Omega \mid \text{η εφαπτομένη της } C \text{ στο } M \text{ παράλληλη στον } x'x \}$  και  $B = \{ \lambda \in \Omega \mid \text{η εφαπτομένη της καμπύλης της παραγώγου } f' \text{, στο } N \text{ να έχει θετική κλίση} \}$  είναι ενδεχόμενα του  $\Omega$ .

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A, B$  και την πιθανότητα του ενδεχομένου:

Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα  $A$  και  $B$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Μια εταιρεία παραγωγής παιχνιδιών έχει δύο εργοστάσια, σε δύο διαφορετικές πόλεις της Ελλάδας την  $A$  και την  $B$ . Στην εταιρεία απασχολούνται σήμερα 200 υπάλληλοι με μέσο χρόνο εργασίας 13,6 έτη.

**Γ1.** Στο εργοστάσιο της πόλης  $A$  εργάζονται  $v_A = 40$  υπάλληλοι όπου τα χρόνια υπηρεσίας τους, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| Χρόνια Εργασίας | $x_i$ | $v_i$    | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|-----------------|-------|----------|-------|-------|-------|
| [.-)            | 6     |          | 0,2   |       |       |
| [.-)            |       |          |       |       | 0,6   |
| [12 -.)         |       |          |       | 28    |       |
| [.-)            |       |          |       |       |       |
| ΣΥΝΟΛΟ          |       | $v = 40$ |       |       |       |

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

**Μονάδες 4**

β) Να βρεθεί η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία έναν υπάλληλο από το εργοστάσιο της πόλης A να έχει εργαστεί 11 τουλάχιστον χρόνια στο εργοστάσιο αυτό.

**Μονάδες 3**

γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση των χρόνων εργασίας των υπαλλήλων στην πόλη A.

**Μονάδες 3**

**Γ2.** Στην πόλη B εργάζονται οι υπόλοιποι υπάλληλοι της εταιρείας. Αν τα χρόνια εργασίας τους στο εργοστάσιο της πόλης B ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή:

α) Να δειχθεί ότι ο μέσος χρόνος εργασίας στο εργοστάσιο αυτό είναι 14 έτη.

**Μονάδες 3**

β) Αν το πλήθος των υπαλλήλων που έχει τουλάχιστον 22 έτη εργασίας είναι 4, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση είναι  $S_B = 4$ .

**Μονάδες 3**

**Γ3.** α) Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δυο ομάδες των υπαλλήλων στα εργοστάσια των πόλεων A και B.

**Μονάδες 4**

β) Στην διάρκεια των 4 επόμενων ετών η εταιρεία έχει στόχο στο εργοστάσιο της πόλης A να απολύσει όσους υπάλληλους έχουν σήμερα τουλάχιστον 12 χρόνια εργασίας και ταυτόχρονα να προσλάβει νέους υπαλλήλους ίσου πλήθους με αυτούς που απολύθηκαν. Να βρεθεί στο τέλος της τετραετίας ο νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων και στα δύο εργοστάσια της εταιρείας.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x^2 + 2x} - 3x^2 + 2x + 8, & \alpha \nu x \neq 0 \\ -\alpha^2 - 6\alpha & , \alpha \nu x = 0 \end{cases}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  και

$g(x) = x^2 + (1 - e)x - e$  και ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Για τα απλά ενδεχόμενα του  $\Omega$  ισχύει ότι:  $2P(-1) = 2P(0) = 2P(1) = P(2) = P(3) = P(4)$ .

- Δ1.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .  
**Μονάδες 3**
- Δ2.** Να βρεθούν οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ .  
Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $a = -3$  να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα  
**Μονάδες 3**
- Δ3.** Αν  $A, B$  ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  με:  $A = \{1, y^2 - 4y + 5, 4\}$ ,  
 $B = \{0, \kappa, -2y + 4\}$  όπου  $\kappa = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( \frac{f'(x)}{-6x + 2} e^x \right)$
- α)** Να βρείτε την τιμή του  $y \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει:  $A \cap B = \{1, 2\}$ .  
**Μονάδες 5**
- β)** Για την τιμή του  $y$  που βρήκατε να αποδείξετε ότι:  $P(A) = \frac{5}{9}, P(B) = \frac{4}{9}$  και να βρείτε τις πιθανότητες:  
 $P(A \cup B)$  και  $P(A - B)$ .  
**Μονάδες 4**
- Δ4. α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $g$  που είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\eta$ ):  $y = (3 - e)x + 7$ .  
**Μονάδες 4**
- β)** Θεωρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων  $E = \{P(A), P(A - B), P(A \cup B)\}$  με τα στοιχεία του  $E$  όπως βρέθηκαν στο Δ3.  
Αν  $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$  με  $\nu = 1, 2, 3$  είναι σημεία της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) και τα  $x_\nu \in E$ , να υπολογίσετε την μέση τιμή των τεταγμένων  $y_\nu$ .  
**Μονάδες 6**