



## Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μία

παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$ .

(Μονάδες 10)

**B.1.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 3)

**B.2.** Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του παράγωγου αριθμού στο σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(Μονάδες 2)

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Αν  $z_1^2 + z_2^2 = 0$  και  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  αναγκαστικά  $z_1 = z_2 = 0$ .

**β)** Αν  $g(x) \neq \alpha$  κοντά στο  $x_0$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$  και  $\lim_{y \rightarrow \alpha} f(y) = l$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l.$$

**γ)** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\beta)$  μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f'(\beta) = 0$ .

**δ)** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\Delta$ , τότε  $f''(x) > 0$ .

**ε)** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[2, 5]$  και  $f(x) \leq 0$  στο  $[2, 5]$ ,

$$\text{τότε } \int_2^5 f(x) dx \geq 0.$$

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  συνδέονται με τη σχέση  $z = \frac{1+2w}{1-w}$  και η εικόνα του  $w$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο  $K(-1,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

α) Να δείξετε ότι η εικόνα του  $z$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο το  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**(Μονάδες 6)**

β) Αν  $|z|=1$  (1) και  $z_1, z_2, z_3$  οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός  $\alpha = \frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_1} + \frac{z_1+z_3}{z_2}$  είναι πραγματικός.

**(Μονάδες 7)**

ii) Αν επιπλέον  $z_1+z_2+z_3=0$  τότε να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$$

**(Μονάδες 7)**

γ) Δίνεται η ευθεία (ε):  $3x+4y-12=0$ . Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού  $w$  από την ευθεία (ε).

**(Μονάδες 5)****ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x > 0$

ισχύουν  $x f'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$  και  $f(1) = 0$ .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = e^x + x$  είναι 1-1.

**(Μονάδες 2)**

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = \ln x$  για κάθε  $x > 0$ .

**(Μονάδες 6)**

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)-1}{x}$  ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

**(Μονάδες 6)**

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$  αν  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .  
(Μονάδες 5)

ε) Να εξετασθεί η  $h$  ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε  $x_1, x_2$  με  $x_2 > x_1 > 0$  ισχύει  $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$ .  
(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\int_3^x \left( \int_1^u f(t) dt \right) du \geq 2x - 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι.}$$

α)  $\int_1^3 f(t) dt = 2$ .

(Μονάδες 7)

β) Αν η εφαπτομένη της γραμμικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  είναι η ευθεία  $4x + y - 3 = 0$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t) dt - x^3}{x^4}$ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν για κάθε  $x \geq 1$  ισχύει  $f'(x) \geq 0$  και  $h(x) = \int_1^x f(t) dt$ , να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $h'(x) > \frac{h(x)}{x-1}$ .

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, 3)$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) + 3 = 2\xi$ .

(Μονάδες 6)