



08
επαναληπτικά
θέματα

ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Ο μαθητής Α έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_A = \frac{16+14+15+18+17}{5} = \frac{80}{5} = 16$, ενώ ο μαθητής Β έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_B = \frac{14+16+17+16+\lambda}{5} = \frac{63+\lambda}{5}$. Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $\frac{63+\lambda}{5} = 16 \Leftrightarrow 63+\lambda = 80 \Leftrightarrow \lambda = 17$.

β.

$$S_A^2 = \frac{(16-16)^2 + (16-14)^2 + (16-15)^2 + (16-18)^2 + (16-17)^2}{5} = \frac{4+1+4+1}{5} = 2, \text{ και}$$

$$S_B^2 = \frac{(16-14)^2 + (16-16)^2 + (16-17)^2 + (16-16)^2 + (16-17)^2}{5} = \frac{4+1+1}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$$

γ. Οι συντελεστές μεταβλητότητας της βαθμολογίας των δυο μαθητών είναι:

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{2}}{16} \text{ και } CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{1,2}}{16}$$

Προφανώς ο μαθητής Β έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής, άρα η βαθμολογία του είναι πιο ομοιογενής.

δ. i) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Τιμές X_i	Συχνότητες V_i	$V_i \cdot X_i$	Σχετικές Συχνότητες f_i
12	1	12	0,05
13	4	52	0,20
14	2	28	0,10
15	4	60	0,20
16	6	96	0,30
17	2	34	0,10
18	1	18	0,05
Αθροίσματα	$v = 20$	300	1,00

- ii) Το εύρος της βαθμολογίας όλων των μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας είναι $18 - 12 = 6$ και η μέση βαθμολογία είναι:

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 1 + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 17 \cdot 2 + 18 \cdot 1}{20} = \frac{300}{20} = 15$$

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι $f(-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{(-1)^2 + \mu(-1) - 2}{-1 - 1} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \mu - 2}{-2} = 1 \Leftrightarrow -1 - \mu = -2 \Leftrightarrow \mu = 1$$

β. i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$ και
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\kappa x + \lambda) = \kappa + \lambda$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\kappa x + \lambda) = 2\kappa + \lambda$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x^2}{2} + \lambda \right) = \frac{2^2}{2} + \lambda = 2 + \lambda$$

iii) Πρέπει $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \kappa + \lambda = 3 \\ 2\kappa + \lambda = 2 + \lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \kappa + \lambda = 3 \\ \kappa = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \kappa = 1 \end{array} \right\}$

- γ. Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2 \quad \text{οπότε} \quad f'(x) = (x+2)' = 1.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Είναι $f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ με ελάχιστη τιμή

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1.$$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1 + x \cdot \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) - 1 + x \cdot \ln(x+1)}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \cdot \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x + \ln(x+1))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + \ln(x+1)) = 0 + \ln 1 = 0$$

γ. Είναι $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Όμως } 3 \cdot F(1) = 7 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1 + 3 \cdot c = 7 \Leftrightarrow 3 \cdot c = 3 \Leftrightarrow c = 1.$$

Επομένως $F(x) = \frac{x^3}{3} + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Είναι $g(x) = f'(x) \cdot e^x = 2x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$g'(x) = (2x \cdot e^x)' = (2x)' \cdot e^x + 2x \cdot (e^x)' = 2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x \text{ και}$$

$$g''(x) = (2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x)' = 2 \cdot (e^x)' + (2x)' \cdot e^x + 2x \cdot (e^x)' = 4 \cdot e^x + 2x \cdot e^x.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} g''(x) + g(x) &= 2x \cdot e^x + 4 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = 4 \cdot e^x + 4x \cdot e^x = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x) = 2 \cdot g'(x) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $P(10) = -10^3 + 15 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - 300$
 $= -1.000 + 15 \cdot 100 + 600 \cdot 10 - 300$
 $= -1.000 + 1.500 + 6.000 - 300 = 6.200$ χιλ.ευρώ.

β. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P'(x) = (-x^3 + 15x^2 + 600x - 300)' = -3x^2 + 30x + 600.$$

Οπότε: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 30x + 600 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 200 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -10$ (απορρίπτεται) ή $x = 20$

Επίσης είναι:

$$P'(x) > 0 \text{ για } x < 20 \text{ και } P'(x) < 0 \text{ για } x > 20.$$

Επομένως η συνάρτηση $P(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 20$, με μέγιστη τιμή

$$\begin{aligned} P(20) &= -20^3 + 15 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 300 = -8.000 + 6.000 + 12.000 - 300 = \\ &= 9.700 \text{ χιλ.ευρώ.} \end{aligned}$$

γ. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P'(x) = (-x^3 + 15x^2 + 600x - 300)' = -3x^2 + 30x + 600.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $x = 10$ είναι:

$$P'(10) = -3 \cdot 10^2 + 30 \cdot 10 + 600 = -300 + 300 + 600 = 600.$$

δ. Η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P''(x) = (-3x^2 + 30x + 600)' = -6x + 30.$$

και είναι:

$$P''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Επίσης είναι

$$P''(x) > 0 \text{ για } x < 5 \text{ και } P''(x) < 0 \text{ για } x > 5.$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής $P'(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$,

με μέγιστη τιμή $P'(5) = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 600 = -75 + 150 + 600 = 675$.

ΦΡΟΝΤ. ΜΕΣΗΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΤΟΥΛΑΣ ΔΑΡΦΗ
ΚΟΜΟΤΗΝΗ