



ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

Α.

αριθμός παιδιών X_i	οικογένειες V_i	σχετικές συχνότητες f_i %	αθροιστικές συχνότητες N_i	σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_i %
0	3	12	3	12
1	6	24	9	36
2	6	24	15	60
3	8	32	23	92
4	2	8	25	100
Σύνολα	$v = 25$	100	-	-

Β. Η μέση τιμή είναι : $\bar{X} = \frac{v_1 \cdot X_1 + v_2 \cdot X_2 + v_3 \cdot X_3 + v_4 \cdot X_4 + v_5 \cdot X_5}{v}$

$$= \frac{3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

Επειδή $v = 25$ η διάμεσος είναι η 13^η παρατήρηση, οπότε είναι ίση με 2.

Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή $X_4 = 3$ γιατί έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα ($v_4 = 8$).

Γ. Η διακύμανση είναι

$$S^2 = \frac{v_1 \cdot (\bar{X} - X_1)^2 + v_2 \cdot (\bar{X} - X_2)^2 + v_3 \cdot (\bar{X} - X_3)^2 + v_4 \cdot (\bar{X} - X_4)^2 + v_5 \cdot (\bar{X} - X_5)^2}{v}$$

$$= \frac{3 \cdot (2 - 0)^2 + 6 \cdot (2 - 1)^2 + 6 \cdot (2 - 2)^2 + 8 \cdot (2 - 3)^2 + 2 \cdot (2 - 4)^2}{25}$$

$$= \frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{25}$$

$$= \frac{12 + 6 + 0 + 8 + 8}{25}$$

$$= \frac{34}{25} = 1,36$$

Η τυπική απόκλιση είναι $S = \sqrt{1,36}$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1,36}}{2} > 0,1$ και επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

(ή αλλιώς είναι $\sqrt{1,36} > 1$ οπότε $\frac{\sqrt{1,36}}{2} > \frac{1}{2}$ ή $CV > 50\%$)

(ακριβέστερα είναι $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1,36}}{2} \approx \frac{1,16}{2} = 0,58$ ή 58%)

- Δ. i) Το πλήθος των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 3 παιδιά είναι $v_4 + v_5 = 8 + 2 = 10$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{10}{25} \cdot 100\% = 40\%$.
- ii) Το πλήθος των οικογενειών που έχουν το πολύ 2 παιδιά είναι $v_1 + v_2 + v_3 = 3 + 6 + 6 = 15$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{15}{25} \cdot 100\% = 60\%$.
- iii) Το πλήθος των οικογενειών που έχουν ένα μόνο παιδί είναι $v_2 = 6$ και το ποσοστό τους είναι $\frac{6}{25} \cdot 100\% = 24\%$.

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

i) $f(0) = \alpha \cdot 0^2 - 1 = -1$, $f(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$ και $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\alpha \cdot x^2 - 1) = \alpha \cdot 2^2 - 1 = 4\alpha - 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 5) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$

iii) Για να είναι συνεχής στο σημείο $x = 2$, πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

δηλαδή $4\alpha - 1 = 3$, άρα $4\alpha = 4$, άρα $\alpha = 1$.

iv) Για $\alpha = 1$, είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 2 \\ 4x - 5 & , x \geq 2 \end{cases}$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x = 2$, μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

- για $h < 0$, είναι $2 + h < 2$ οπότε:

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 1 = 4 + 4h + h^2 - 1 = 3 + 4h + h^2, \text{ και}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3 + 4h + h^2 - 3}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h,$$

$$\text{οπότε } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (4+h) = 4$$

- για $h > 0$, είναι $2 + h > 2$ οπότε:

$$f(2+h) = 4(2+h) - 5 = 8 + 4h - 5 = 3 + 4h, \text{ και}$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{3 + 4h - 3}{h} = \frac{4h}{h} = 4,$$

$$\text{οπότε } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 4 = 4$$

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$, οπότε

η f είναι παραγωγίσιμη για $x = 2$, με $f'(2) = 4$.

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

- α) Είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)(x-1)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 3(x-1) \\ &= 3(3-1) = 6 \end{aligned}$$

β) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + \alpha$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ και
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	T.M.	\searrow	T.E.	\nearrow

Άρα η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή $f(1) = 1 - 6 + 9 + \alpha = 4 + \alpha$ και
- τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ με τιμή $f(3) = 27 - 54 + 27 + \alpha = \alpha$.

γ) Πρέπει $f(1) = 2 \cdot f(3) \Leftrightarrow 4 + \alpha = 2 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$

δ) Για $\alpha = 4$ ο τύπος της $f(x)$ γίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, $x \in \mathbb{R}$

οπότε $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x + c$ με $F(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως η ζητούμενη παράγουσα της $f(x)$ είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

i) Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $S(t)$ είναι

$$S'(t) = (t^2 + 18 \ln(t+1) + 4)' = 2t + 18 \frac{1}{t+1} (t+1)' = 2t + \frac{18}{t+1}.$$

και εκφράζει την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$.

ii) Η αρχική ταχύτητα του σημείου είναι $v(0) = S'(0) = 2 \cdot 0 + \frac{18}{0+1} = 18 \left(\frac{m}{s} \right)$

iii) Η επιτάχυνση του σημείου κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$\gamma(t) = v'(t) = S''(t) = \left(2t + \frac{18}{t+1} \right)' = 2 + \frac{(18)'(t+1) - (18)(t+1)'}{(t+1)^2} = 2 - \frac{18}{(t+1)^2}$$

Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 5$ s, η επιτάχυνση είναι

$$\gamma(5) = 2 - \frac{18}{(5+1)^2} = 2 - \frac{18}{36} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

iv) Η ταχύτητα του σημείου κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 2t + \frac{18}{t+1}$ με

$$v'(t) = \left(2t + \frac{18}{t+1}\right)' = 2 - \frac{18}{(t+1)^2} \text{ οπότε:}$$

$$v'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \frac{18}{(t+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{18}{(t+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(t+1)^2 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad t+1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $v'(t)$:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	-	0	+
$v(t)$		↘ Ελάχ.	↗

Άρα η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t = 2$ s.

$$\text{Η ελάχιστη ταχύτητα είναι } v(2) = 2 \cdot 2 + \frac{18}{2+1} = 4 + 6 = 10 \text{ (m/s)}.$$