

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

30 ΜΑΪΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 30.  
A2. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 13.  
A3. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 59.  
A4. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

B1. Το πλήθος των πωλητών της εταιρίας είναι:  $v=6+8+12+14=40$ .

B2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i$
[2,4)	3	12	0,30
[4,6)	5	8	0,20
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Είναι

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{12}{40} = 0,30$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{40} = 0,20$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0,35$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{6}{40} = 0,15$$

B3. α)  $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = 5,7$  χιλιάδες ευρώ.

- β) Επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες, το πλήθος των πωλητών που βρίσκονται στο διάστημα  $[4,5, 6)$  είναι  $\frac{6-4,5}{6-4} \cdot 8 = \frac{1,5}{2} \cdot 8 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ .

Συνολικά, το ζητούμενο πλήθος πωλητών είναι:  $6+14+6=26$ .

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ1.

Είναι

$$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{αφού} \quad x_1 < x_2$$

Ο πίνακας μεταβολής της  $f$  είναι ο ακόλουθος:

$x$	$-\infty$	$1/4$	$1/3$	$+\infty$
$f'$	+	○	○	+
$f$		↗	↘	↗

Προκύπτει ότι η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x_1 = \frac{1}{4}$  και

τοπικό ελάχιστο στη θέση  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

Έτσι είναι  $P(K) = \frac{1}{4}$  και  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

Επειδή  $A, K, \Pi$  είναι ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ανά δύο και  $A \cup K \cup \Pi = \Omega$ , ισχύει  $P(A \cup K \cup \Pi) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$$

Γ2. Επειδή  $A, K, \Pi$  είναι ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα ισχύει:

$$P(\Gamma) = P(A \cup K) = P(A) + P(K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$P(\Delta) = P\left[(K \cup A)'\right] = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$P(E) = P(A \cup \Pi') = P(A) \cup P(\Pi') - P(A \cap \Pi') = P(A) + 1 - P(\Pi) - [P(A) - P(A \cap \Pi)] =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - \frac{5}{12} - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{7}{12}.$$

**Γ3.** Έστω ότι έχουμε  $N(A)$  άσπρες μπάλες,  $N(K)$  κόκκινες μπάλες και  $N(\Pi)$  πράσινες μπάλες.

Αν  $N(\Pi) = x$  θα είναι  $N(A) = x - 4$ . Όμως

- $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{x-4}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$  οπότε,  $3x - 12 = N(\Omega)$  (1).

- $P(\Pi) = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{x}{N(\Omega)} = \frac{5}{12}$  οπότε,  $12x = 5N(\Omega)$  (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει  $x = 20$ ,  $N(\Omega) = 48$ .

Άρα το δοχείο περιέχει συνολικά 48 μπάλες.

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Έστω  $y$  dm η άλλη πλευρά της βάσης.

Αφού η βάση έχει σταθερή περίμετρο 20 dm είναι:

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x.$$

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού είναι:

$$E = x \cdot y + 2 \cdot 5x + 2 \cdot 5x = x(10 - x) + 10(10 - x) + 10x =$$

$$= 10x - x^2 + 100 - 10x + 10x = -x^2 + 10x + 100.$$

Άρα  $E(x) = -x^2 + 10x + 100$  με  $x \in (0, 10)$ .

Είναι  $E'(x) = -2x + 10$ ,  $x \in (0, 10)$ .

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	0	5	10
$E'$		+	-
$E$		↗	↘

Άρα η  $E(x)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = 5$  dm.

**Δ2.** α) Αφού το δείγμα των τετμημένων  $x_i$  δεν είναι ομοιογενές θα ισχύει

$$C_v > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{8} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow S > \frac{4}{5}.$$

Από την εξίσωση  $2S^2 - 5S + 2 = 0$  προκύπτει  $S = 2$  ή  $S = \frac{1}{2}$ . Επειδή  $S > \frac{4}{5}$  επιλέγουμε  $S = 2$ .

β) Η ζητούμενη μέση τιμή των  $x_i^2$  είναι  $\overline{x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15}$ .

Ο τύπος  $S^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu} \right\}$  μετασχηματίζεται:

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu^2} \left( \sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left( \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu} \right)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x_i^2} - \bar{x}^2 \quad (1).$$

Η σχέση (1) για  $\nu = 15$  και δεδομένου ότι  $S = 2$ ,  $\bar{x} = 8$  γίνεται:

$$2^2 = \overline{x_i^2} - 8^2 \Leftrightarrow 4 = \overline{x_i^2} - 64 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 68, \text{ που είναι η ζητούμενη μέση τιμή.}$$

Δ3. Η συνάρτηση  $E(x)$  στο διάστημα  $[5, 10)$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα αφού  $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{15} = 9 \Rightarrow E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15})$ .

Άρα το εύρος των  $E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_{15})$  είναι:

$$R = E(x_1) - E(x_{15}) = E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16.$$

Είναι

$$y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow E(x_i) > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 14x_i - 45 > 0 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \quad (1).$$

Οι ρίζες του τριωνύμου  $x_i^2 - 14x_i + 45$  είναι 5 και 9 και ο πίνακας προσήμων του είναι ο παρακάτω:

	$x$	$-\infty$	$5$	$9$	$+\infty$
$x^2 - 14x + 45$	+		-		+

Άρα η (1) ισχύει όταν  $5 < x_i < 9 \Rightarrow x_i \in \{x_2, x_3, \dots, x_{14}\}$

Άρα το ενδεχόμενο B είναι:  $B = \{A_2, A_3, \dots, A_{14}\}$  ενώ  $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_{15}\}$ .

$$\text{Έτσι προκύπτει } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}.$$