

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28  
A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14  
A3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87  
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

## ΘΕΜΑ Β

B1.

$$\begin{aligned} \bullet P(\omega_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  ως προς  $x$  όταν  $x = 1$ , ισούται με  $f'(1)$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x > 0$  με

$$f'(x) = \left( \frac{x}{3} \ln x \right)' = \left( \frac{x}{3} \right)' \ln x + \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{3}.$$

Για  $x = 1$  έχουμε:

$$f'(1) = \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- B2. Είναι  $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ . Επειδή  $\{\omega_3\} \subseteq A'$  είναι  $P(\omega_3) \leq P(A')$ . Όμως  $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

$$\text{οπότε } \frac{1}{3} \leq P(A'). \quad P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \geq \frac{1}{4}.$$

Πράγματι,  $\{\omega_1\} \subseteq A$  άρα  $P(\omega_1) \leq P(A)$ . Όμως  $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ , άρα  $P(A) \geq \frac{1}{4}$ .

**B3.**

$$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}.$$

Όμως  $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$  και επειδή  $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

$$\text{προκύπτει } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0.$$

Είναι  $P(\Omega) = 1$ , άρα  $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

και επειδή  $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\omega_4) = 0$  προκύπτει

$$P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}.$$

Τα  $A - B$ ,  $B - A$  είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, άρα

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως  $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ , άρα  $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$ .

$$B = \{\omega_1, \omega_3\}, \text{ άρα } P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$A \cap B = \{\omega_1\}, \text{ άρα } P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}.$$

Από την (1) βρίσκουμε ότι:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

β' τρόπος:  $A - B = \{\omega_4\}$ ,  $B - A = \{\omega_3\}$  άρα

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(\{\omega_3\} \cup \{\omega_4\}) = \\ &= P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A' - B') &= P(A') - P(A' \cap B') = P(A') - P[(A \cup B)'] = 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = \\ &= P(A \cup B) - P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) = \\ &= P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

β' τρόπος: Είναι  $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$  και  $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$   
 οπότε  $A' - B' = \{\omega_3\}$ . Άρα  $P(A' - B') = P(\omega_3) = 1/3$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αν  $c$  το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι  $[50 + 3c, 50 + 4c)$ .  
 Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι  

$$\frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 50 + \frac{7c}{2} = 85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2} = 35 \Leftrightarrow c = 10.$$

**Γ2.** Αφού η διάμεσος είναι  $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5$ .  
 Επίσης,  $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$ . Επίσης ισχύουν  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$   
 καθώς και  $f_4 = 2f_3$  άρα,

$$\left. \begin{aligned} f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} &= 0,5 \\ 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 &= 74 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= 1 \\ f_4 &= 2f_3 \end{aligned} \right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει  $f_1 = 0,1, f_2 = 0,3, f_3 = 0,2, f_4 = 0,4$ .  
 Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	$x_i$	$f_i$
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο	280	1

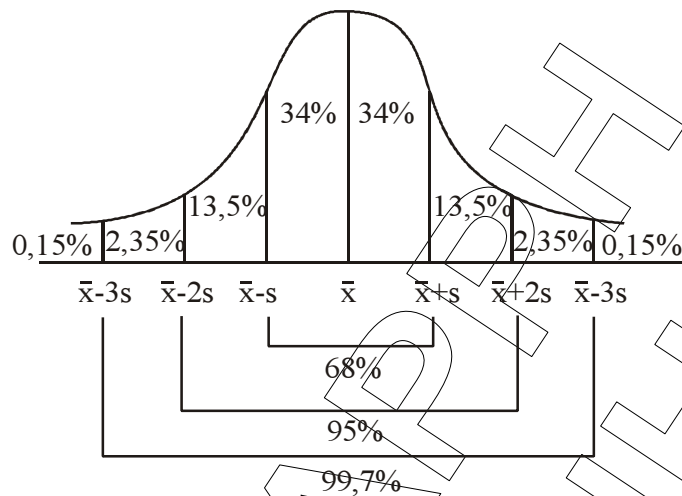
**Γ3.** Έχουμε  $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 74v \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 x_i v_i + x_4 v_4 = 74v \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 x_i v_i = 74v - x_4 v_4 \quad (1)$$

Επομένως η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i v_i}{v_1 + v_2 + v_3} \stackrel{(1)}{=} \frac{74v - x_4 v_4}{v - v_4} = \frac{74 - x_4 f_4}{1 - f_4} = \frac{74 - 85 \cdot 0,4}{1 - 0,4} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

**Γ4.** Αφού η κατανομή είναι κανονική



και το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι  $\bar{x} + 2s = 74$ . Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι θα είναι  $\bar{x} - s = 68$ , όπου  $\bar{x}, s$  η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των  $k$  παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι  $\bar{x} + 2s = 74$ ,  $\bar{x} - s = 68$ .

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει  $\delta = 2$  και  $\bar{x} = 70$ .

Ο συντελεστής μεταβολής των  $k$  παρατηρήσεων είναι  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$ .

Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1.  $f'(x) = \ln x + 1$ ,  $x > 0$

Η εφαπτόμενη της  $f$  στο σημείο  $(1, f(1))$  είναι:

(ε):  $y = \lambda x + \beta$  όπου  $\lambda = f'(1) = 1$ .

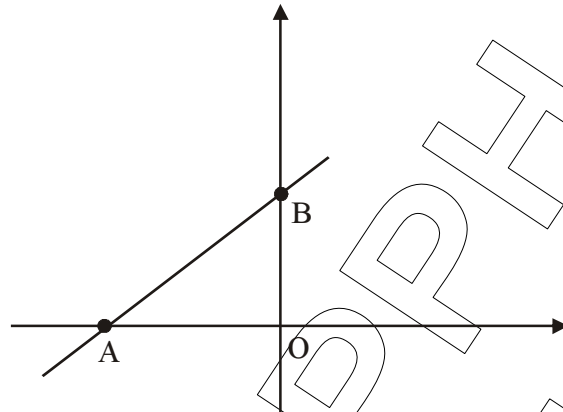
Επειδή η (ε) διέρχεται από το  $(1, f(1))$  αλλά

$f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(1) - 1 = 1 \ln 1 + \kappa - 1 = \kappa - 1$

η (ε) γίνεται  $y = x + \kappa - 1$ .

Τα σημεία A, B στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  είναι  $A(1-\kappa, 0)$  και  $B(0, \kappa-1)$  αντίστοιχα.

Το τρίγωνο OAB έτσι έχει εμβαδόν:  $E = \frac{1}{2} (OA)(OB)$  άρα



$$E = \frac{|1-\kappa| \cdot |\kappa-1|}{2} = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

$$\text{Δίνεται } E < 2, \text{ άρα } \frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa-1|^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \kappa-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

Όμως  $\kappa$  ακέραιος με  $\kappa > 1$ , άρα  $\kappa = 2$ .

**Δ2.**

α) Επειδή  $\kappa = 2$  η (ε) γίνεται  $y = x + 1$

Επίσης από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι:

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30.$$

β) Είναι  $31 = \frac{(x_1 + 3) + \dots + (x_{20} + 3) + x_{21} + \dots + x_{35} + (x_{36} - \lambda) + \dots + (x_{50} - \lambda)}{50} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 31 \cdot 50 \Leftrightarrow 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda = 30 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 - 15\lambda = 0 \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

**Δ3.** Είναι  $f'(x) = \ln x + 1, x > 0$ .

Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0	1/e	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)			

$$\text{Προκύπτει } \min f : f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e} > 0$$

Στο διάστημα  $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$  και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e).$$

Επειδή  $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$  προκύπτει:  $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$ .

$$\text{Έτσι } R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2.$$

Από τη δοσμένη σχέση  $a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$  προκύπτει

$$\begin{aligned} \ln(a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) &= \ln e^7 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7 \\ \Leftrightarrow f(\alpha) - 2 + f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 2 &= 7 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } \bar{x} &= \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} = \\ &= \frac{13 + e + 2}{5} = \frac{15 + e}{5}. \end{aligned}$$

**Δ4.** α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε:

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}.$$

$$\text{Άρα } A = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{30}\}.$$

$$N(A) = 20 \text{ άρα } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:

$$f(t) > f(t') + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1) \ln t > 0.$$

$$\text{Άρα } \{t-1 < 0 \text{ και } \ln t < 0\} \text{ ή } \{t-1 > 0 \text{ και } \ln t > 0\}$$

Η δεύτερη περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει διότι  $t \in \Omega$ , άρα  $t < 1$ .

$$\text{Άρα } 0 < t < 1, \text{ άρα } B = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_{29}\}.$$

$$\text{Έτσι } A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{29}\} \text{ και άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}.$$