

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α, β]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α, β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

- A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

- A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση  $|z - z_0| = \rho, \rho > 0$  παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(z_0)$  και ακτίνα  $\rho^2$ , όπου  $z, z_0$  μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

γ) Ισχύει ότι:  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

- B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , είναι κύκλος με κέντρο  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$  (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό  $z$  που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 3$  (μονάδες 3)

Μονάδες 8

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης  $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , με  $w$  μιγαδικό αριθμό,  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

**Μονάδες 9**

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f$  παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $f(0) = 1$  και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 9**

- Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

**Μονάδες 8**

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(1) = 0$  (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

**Δ2.** η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο  $\mathbb{R}$ .

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες } 6)$$

**Μονάδες 9**

**Δ3.** η  $g$  είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

**Μονάδες 10**