

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Θεωρούμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο \mathbb{R} ώστε $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$.

(α) Ναδειχτεί ότι υπάρχουν δυο σημεία ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 \in (-2, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε : $|g(\xi_1)| \leq 2$ και $|g(\xi_2)| \leq 2$, όπου $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε $G(x) = (4-x) \int_2^x f(t) dt$, $x \in [2, 4]$ με $f(x)$ συνεχή στο διάστημα $[2, 4]$.

(α) Να δείξετε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ και να βρεθεί η G' .

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $G'(\xi) = 0$.

(γ) Για το ξ του (β) ερωτήματος να δείξετε ότι :

$$\int_2^{\xi} f(t) dt = (4-\xi)f(\xi).$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z = f(x) + f(x)i$, με $f(x)$ συνεχή στο \mathbb{R} και $|z| = \sqrt{2}(1+e^x)$

(α) Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$ αν το σημείο $A(0, -2)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

(β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του μιγαδικού z .

(γ) Αν $w = f(x) - f^2(x)i$ να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{Re}(z \bar{w})$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με την $f''(x)$ συνεχή στο \mathcal{R} ώστε να ισχύουν:

$$\int_0^x (t^2 + 3) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - \frac{3}{4} \int_0^2 x \cdot t^2 \cdot f(x) dt \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R} \text{ και } f(0)=0,$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}.$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Αν $E(\lambda)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x ' x και τις ευθείες $x=0$ και $x=\lambda>0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\lambda)$ αν το λ αυξάνει με ρυθμό $4 \mu/\text{sec}$ τη χρονική στιγμή που το λ είναι ίσο με 1μ .

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)$ για την οποία ισχύει: $|h(x) - 2x - 3| \leq |f(x)|$ (2) για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

i) Να δείξετε ότι η $\varepsilon: y=2x+3$ είναι ασύμπτωτη της C_h όταν $x \rightarrow -\infty$

ii) Αν E το εμβαδό που περικλείεται από την C_h , την πλάγια ασύμπτωτη της C_h όταν $x \rightarrow -\infty$ και τις ευθείες $x=-3$ και $x=0$, να δείξετε ότι $E \leq \ln 2$.

**Επιμέλεια: Βαργεμετζίδης Κων/νος
Μαθηματικός**